Лекции по анализу.
Ряды.

Е. В. Щепин

Семестр 1

Оглавление

1 Формальное суммирование

Бесконечность является главным действующим лицом математического анализа. Характеристическим свойством бесконечного является то, что оно может быть равно своей части. Например, рассмотрим такое бесконечное выражение:

$$1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\dots}}}$$

Мы видим, что знаменатель дроби в точности равен всему выражению, поэтому, если значение всего выражения обозначить через x, то мы получаем следующее уравнение на x

$$x = 1 + \frac{1}{x}$$

Это уравнение имеет два решения, лишь одно из которых положительно и равно $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$. Поэтому естественно предположить, что значением этого выражения является именно $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$.

Рядом называется бесконечная последовательность чисел, соединенных знаком сложения. Например, следующий ряд, *обратных квадратов*

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \frac{1}{36} + \dots \tag{1.1}$$

содержит все дроби вида $\frac{1}{k^2}$, где k — любое натуральное число. Для сокращенной записи ряда применяется знак суммы $\sum$. В сокращенной записи ряд обратных квадратов выглядит так

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$$

Знак $\sum$ используется и для записи конечных сумм. Общая форма записи суммы с помощью этого знака такова:

$$\sum_{k=m}^{n} a_k = a_n + a_{n+1} + a_{n+2} + \dots + a_{m-1} + a_m \tag{1.2}$$

Здесь через a_k обозначается k-ое слагаемое ($a_k = \frac{1}{k^2}$ для 1.1) так называемый *общий член ряда*. Через m и n обозначаются *пределы суммирования* (нижний и верхний соответственно). В качестве нижнего предела суммирования для рядов будут применяться в основном единица и реже ноль, а в качестве верхнего предела — в основном бесконечность. Наконец, k играет роль *индекса суммирования*. Если вместо k подставить любую другую букву это не изменит значения суммы. Для знающих программирование индекс суммирования — это счетчик цикла, значение которого за пределами цикла (суммы) неопределено.

Суммирование бесконечного числового ряда является одной из классических задач математического анализа. Так задача суммирования ряда (1.1) была в начале восемнадцатаго столетия одной из самых известных проблем, которую пытались решить многие выдающиеся математики. В 1828 году она была решена великим математиком Леонардом Эйлером, который доказал, что сумма ряда обратных квадратов равна $\pi^2/6$. Позднее мы узнаем, как он получил этот весьма непростой результат.

Эйлер считал, что любой числовой ряд имеет "сумму". И в сегодняшней лекции мы покажем как можно находить суммы бесконечных рядов, предполагая, что на бесконечные суммы распространяются основные арифметические законы такие как ассоциативность сложения и дистрибутивность умножения относительно сложения.

Авторекурсия. Сегодня мы научимся суммировать бесконечные ряды не давая определения их суммы, а руководствуясь тремя естественными правилами, которые мы будем предполагать выполненными для любых рядов.

Чтобы найти сумму ряда мы будем строить уравнение, которому она удовлетворяет. Мы назовем этот метод *авторекурсией.* "Рекурсия" значит "возврат к известному". "Авторекурсия" значит "возврат к самому себе".

Мы будем называть следующее равенство *формулой рекурсии*:

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = a_1 + \sum_{k=2}^{\infty} a_k \tag{1.3}$$

Другая основная формула, которую мы используем при авторекурсии называется *формула умножения*:

$$\lambda \sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda a_k \tag{1.4}$$

Эти две формулы — все что нам нужно для нахождения суммы геометрической прогрессии $\sum\limits_{k=0}^{\infty} q^k$. Точнее, формула умножения дает равенство $\sum\limits_{k=1}^{\infty} q^k = q \sum\limits_{k=0}^{\infty} q^k$. Следовательно, формула рекурсии превращается в уравнение $x = 1 + qx$, где x есть $\sum\limits_{k=0}^{\infty} q^k$. Решение этого уравнения снова дает нам формулу для суммы бесконечной геометрической прогрессии.

$$1 + q + q^2 + q^3 + \cdots = \frac{1}{1-q} \tag{1.5}$$

Из формулы для бесконечной можно вывести формулу для конечной геометрической прогрессии:

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = \sum_{k=0}^{\infty} q^k - \sum_{k=n+1}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q} - \frac{q^{n+1}}{1-q} = \frac{1-q^{n+1}}{1-q} \tag{1.6}$$

Эта важная формула относится к школьной программе.

Пример Ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{k}{2^k}$. Чтобы найти методом авторекурсии сумму ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{k}{2^k}$ мы должны применить дополнительно следующую *формулу сложе-*

ния,

$$\sum_{k=1}^{\infty}(a_k+b_k)=\sum_{k=1}^{\infty}a_k+\sum_{k=1}^{\infty}b_k, \tag{1.7}$$

которая является последней в сегодняшней лекции общей формулой для рядов.

Переиндексирование ряда $\sum\limits_{k=2}^{\infty}\frac{k}{2^k}$ дает ему вид $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{k+1}{2^{k+1}}$. Далее с помощью формулы сложения он разлагается на две части:

$$\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k+1}{2^k}=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k}{2^k}+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}$$

Первое слагаемое представляет собой умноженный на x исходный ряд. Второе — геометрическая геометрическая прогрессия, сумма которой нам известна. Теперь формула рекурсии для суммы s исходного ряда превращается в уравнение $s=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}s+\frac{1}{2}$, решением которого служит $s=2$.

Числа Фиббоначчи. Начиная с $\varphi_0=0$, $\varphi_1=1$ и применяя рекуррентное соотношение

$$\varphi_{n+1}=\varphi_n+\varphi_{n-1}, \tag{1.8}$$

можно построить бесконечную последовательность чисел $0,1,2,3,5,8,13,21,\ldots$, называемых *числами Фиббоначчи*. Сейчас мы получим формулу для φ_n.

Чтобы это сделать рассмотрим следующую функцию $\Phi(x)=\sum\limits_{k=0}^{\infty}\varphi_k x^k$, называемую *производящей функцией* последовательности $\{\varphi_k\}$. Так как $\varphi_0=0$, сумма $\Phi(x)+x\Phi(x)$ преобразуется следующим образом:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\varphi_k x^k+\sum_{k=1}^{\infty}\varphi_{k-1}x^k=\sum_{k=1}^{\infty}\varphi_{k+1}x^k=\frac{\Phi(x)-x}{x} \tag{1.9}$$

Умножая обе стороны уравнения на x и собирая члены с $\Phi(x)$ справа, получаем $x=\Phi(x)-x\Phi(x)-x^2\Phi(x)=x$. Это дает

$$\Phi(x)=\frac{x}{1-x-x^2}$$

Корни уравнения $1-x-x^2=0$ суть $\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$. Более знаменита пара обратных величин $\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$. Число $\varphi=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ есть так называемое *золотое сечение*. Оно играет важную роль в математике, архитектуре и биологии. Двойственным к нему является $\hat{\varphi}=\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$. Так что $\varphi\hat{\varphi}=-1$, и $\varphi+\hat{\varphi}=1$. Следовательно, $(1-x\varphi)(1-x\hat{\varphi})=1-x-x^2$, что в свою очередь ведет к следующему разложению:

$$\frac{x}{x^2+x-1}=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1}{1-\varphi x}-\frac{1}{1-\hat{\varphi}x}\right)$$

Дроби справа разлагаются в геометрические ряды:

$$\frac{1}{1-\varphi x}=\sum_{k=0}^{\infty}\varphi^k x^k \qquad \frac{1}{1-\hat{\varphi}x}=\sum_{k=0}^{\infty}\hat{\varphi}^k x^k \tag{1.10}$$

Это дает следующее представление для производящей функции

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{5}} \sum_{k=0}^{\infty} (\varphi^k - \hat{\varphi}^k) x^k$$

С другой стороны коэффициенты при x^k в исходном представлении для $\Phi(x)$ суть φ_k. Следовательно,

$$\varphi_k = \frac{1}{\sqrt{5}}(\varphi^k - \hat{\varphi}^k) = \frac{(\sqrt{5}+1)^k + (-1)^k(\sqrt{5}-1)^k}{2^k\sqrt{5}} \tag{1.11}$$

Эта формула была впервые открыта Эйлером, но стала широко известной только после переоткрытия ее спустя столетие Бине, и называется формулой *Эйлера-Бине.* Ее легко проверить для малых k и доказать по индукции, на основе рекуррентного соотношения.

Парадоксы формального суммирования. Рассмотрим ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} 2^k$. Это геометрический ряд. Мы умеем суммировать его методом авторекурсии. Уравнение авторекурсии для этого ряда имеет вид $s = 1+2s$. Единственное число, удовлетворяющее этому уравнению — это -1. Сумма положительных чисел оказывается отрицательной!? Что-то не так!

Философ Гвидо Гранди в 1703 привлек внимание публики к ряду $1-1+1-1+\dots$. Он утверждал, что этот ряд символизирует создание вселенной из ничего. А именно, расстановка в нем скобок одним способом дает Ничто (то есть 0), другим способом дает 1.

$$\begin{gathered}(1-1)+(1-1)+(1-1)+\dots = 0+0+0+\dots = 0\\ 1-(1-1)-(1-1)-(1-1)\dots = 1-0-0-0\dots = 1.\end{gathered}$$

С другой стороны, ряд $1-1+1-1+1-1+\dots$ является геометрической прогрессией с отрицательным знаменателем $q=-1$. Его уравнение авторекурсии $s = 1-s$ имеет единственное решение $s=\frac{1}{2}$. Ни $+\infty$ ни $-\infty$ не удовлетворяют этому уравнению. Поэтому $\frac{1}{2}$ представляется его истинной суммой. Мы видим, что сумма бесконечного числа целых чисел может быть нецелой.

Рассуждение Гранди опровергает закон ассоциативности для бесконечных рядов: расстановка скобок может менять сумму ряда $1-1+1-1+\dots$. Следующей жертвой этого ряда является закон коммутативности. Сумма $-1+1-1+1-1+\dots$ равна $-\frac{1}{2}$. Но, последний ряд получается из $1-1+1-1+\dots$ посредством перестановки четных и нечетных членов.

И еще одна неожиданность: разбавление ряда нулями может изменить его сумму. Сумма $1+0-1+1+0-1+1+0-1+\dots$ не равна $\frac{1}{2}$, она равна $\frac{2}{3}$. Действительно, если мы обозначим эту сумму через s, то формула рекурсии дает:

$$\begin{aligned} s &= 1+0-1+1+0-1+1+0-1+1+0-1+\dots\\ s-1 &= 0-1+1+0-1+1+0-1+1+0-1+1+\dots\\ s-1-0 &= -1+1+0-1+1+0-1+1+0-1+1+0+\dots \end{aligned}$$

Суммируя числа по столбцам (т. е. с помощью формулы почленного сложения рядов), мы получим

$$s + (s-1) + (s-1-0) = (1+0-1) + (0-1+1) + (-1+1+0) + \\ + (1+0-1) + (0-1+1) + (-1+1+0) + \dots$$

Слева стоит $3s-2$. Справа — нулевой ряд. Вот почему $s = \frac{2}{3}$.

Задачи.

1. Суммировать $\frac{2}{3} + \frac{2^2}{3^2} + \frac{2^3}{3^3} + \frac{2^2}{3^2} + \dots$
2. Суммировать $1 - 2 + 2^2 - 2^3 + \dots$
3. Суммировать $1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$
4. Суммировать $1 + 1 - 2 + 1 + 1 - 2 + \dots$
5. Найти $1 - 2 + 3 - 4 + \dots$
6. Найти $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{k}{3^k}$
7. Найти $\sum\limits_{k=1}^{\infty} k^2 3^k$
8. Найти $1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \dots$

2 Положительные ряды

Определение бесконечной суммы. Во всех парадоксах, связанных с расходящимися рядами участвуют отрицательные числа. Поэтому мы начнем построение непротиворечивой теории сходящихся бесконечных рядов с *положительных рядов* — так мы будем называть ряды, все члены которых неотрицательны.

Один из замечательных результатов Эйлера заключается в доказательстве следующего равенства:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6} \tag{2.1}$$

Что же означает это равенство? Естественный ответ таков: *частичные суммы* $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$, которые содержат все больше и больше обратных квадратов, приближаются все ближе и ближе к величине $\frac{\pi^2}{6}$. В частности все частичные суммы меньше чем $\frac{\pi^2}{6}$, его *полная сумма.* Действительно, если бы некоторая частичная сумма превзошла или совпала с $\frac{\pi^2}{6}$, тогда все последующие суммы удалялись бы от $\frac{\pi^2}{6}$. Далее, любое число c, которое меньше чем $\frac{\pi^2}{6}$ должно быть в конце концов превзойдено частичными суммами, когда они приблизятся к $\frac{\pi^2}{6}$ ближе, чем на $\frac{\pi^2}{6} - c$. Следовательно полная сумма превосходит все частичные суммы и никакое меньшее число не делает этого. Это значит, что *полная сумма есть наименьшее число, превосходящее все частичные суммы.*

Геометрическая мотивировка. Представим последовательность отрезков вещественной прямой $[a_{i-1}, a_i)$. Обозначим через l_i длину i-го отрезка. Пусть $a_0 = 0$ есть левый конец первого интервала. Тогда объединение этих отрезков представляет собой полуинтервал $[0, A)$, длина которого (равная A) естественно интерпретируется как $\sum\limits_{i=1}^{\infty} l_i$ сумма длин интервалов последовательности.

Все вышесказанное мотивирует следующее определение.

Определение. *Если частичные суммы положительного ряда* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ *неограниченно возрастают, то его сумма определяется как* ∞ *и ряд называется* расходящимся. *В противном случае ряд называется* сходящимся, *и его сумма определяется как наименьшее число* A*, для которого* $A \geq \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$ *при всех* n.

Тогда определение суммы ряда равносильно следующей паре свойств.

Частичная сумма положительного ряда не превосходит полной *(часть меньше целого).*

Частичные суммы положительного ряда *исчерпывают* его полную сумму, то есть они превосходят любое число, меньшее полной суммы.

При доказательствах свойств бесконечных сумм мы часто будем использовать следующую теорему, непосредственно вытекающую из определения полной суммы.

Теорема 1 (принцип исчерпывания). *Если все частичные суммы положительного ряда не превосходят некоторого числа, то и полная сумма не превосходит этого числа.*

Основные операции с рядами. Исходя из данного выше определения, мы можем теперь доказать справедливость, использованных ранее правил обращения с бесконечными рядами для положительных рядов.

Теорема 2 (Формула рекурсии.). *Если сходится хотя бы один из рядов* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ *и* $\sum\limits_{k=2}^{\infty} a_k$*, то сходится и другой и имеет место равенство*

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = a_1 + \sum_{k=2}^{\infty} a_k \tag{2.2}$$

Доказательство. Если сходится $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ и его частичные суммы ограничены числом A, то частичные суммы ряда $\sum\limits_{k=2}^{\infty} a_k$ ограничены тем же числом, поэтому он тоже сходится.

Если сходится $\sum\limits_{k=2}^{\infty} a_k$ и его частичные суммы ограничены числом A, то частичные суммы ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ ограничены числом $A + a_1$, поэтому он тоже сходится.

Для того, чтобы доказать, что левая часть не превосходит правой, в силу принципа исчерпывания достаточно при любом n доказать неравенство $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k \leq a_1 + \sum\limits_{k=2}^{\infty} a_k$. Справедливость этого легко получить из неравенств $\sum\limits_{k=2}^{\infty} a_k > \sum\limits_{k=2}^{n} a_k$.

Для доказательства обратного неравенства перенесем a_1 в левую часть. Получим эквивалентное неравенство $\sum\limits_{k=2}^{\infty} a_k \leq \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k - a_1$, справедливость которого, в силу принципа исчерпывания вытекает из следующего $\sum\limits_{k=2}^{n} a_k \leq \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k - a_1$. Последнее же верно ввиду неравенства $\sum\limits_{k=2}^{\infty} a_k \geq \sum\limits_{k=2}^{n} a_k$. □

Теорема 3 (Формула умножения.). *Пусть λ является положительным числом, тогда если сходится хотя бы один из рядов* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ *и* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \lambda a_k$*, то сходится и другой и имеет место равенство*

$$\lambda \sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda a_k \tag{2.3}$$

Доказательство. Если сходится $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ и его частичные суммы ограничены числом A, то частичные суммы ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \lambda a_k$ ограничены числом λA, поэтому он тоже сходится.

Если сходится $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \lambda a_k$ и его частичные суммы ограничены числом A, то частичные суммы ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ ограничены числом A/λ, поэтому он тоже сходится.

Для любой частичной суммы правой части (**??**), в силу дистрибутивности умножения для конечных сумм будет

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda a_k = \lambda \sum_{k=1}^{n} a_k. \tag{2.4}$$

А так как частичная сумма не превосходит полной и $\lambda > 0$, то получаем $\lambda \sum\limits_{k=1}^{n} a_k \leq \lambda \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$, откуда ввиду (2.4), при любом n получаем неравенство $\sum\limits_{k=1}^{n} \lambda a_k \leq \lambda \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$. В силу принципа исчерпывания отсюда вытекает, неравенство $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \lambda a_k \leq \lambda \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$.

Противоположное неравенство равносильно следующему $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k \geq \frac{1}{\lambda} \sum\limits_{k=1}^{\infty} \lambda a_k$. Так как любая частичная сумма $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k$ равна $\frac{1}{\lambda} \sum\limits_{k=1}^{n} \lambda a_k$, которая не превосходит $\frac{1}{\lambda} \sum\limits_{k=1}^{\infty} \lambda a_k$, в силу принципа исчерпывания получаем противоположное неравенство. □

Теорема 4 (Формула сложения.). *Ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(a_k + b_k)$ *сходится в том и только том случае, когда сходятся оба ряда* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ *и* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$. *И в этом случае имеет место равенство*

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k + \sum_{k=1}^{\infty} b_k = \sum_{k=1}^{\infty}(a_k + b_k) \tag{2.5}$$

Доказательство. Если сходится $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(a_k + b_k)$ и его частичные суммы ограничены числом A, то частичные суммы рядов $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ и $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ ограничены тем же числом, поэтому они тоже сходится.

Если сходятся оба $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ и $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ и их частичные суммы ограничены числами A и B, соответственно, то частичные суммы ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(a_k + b_k)$ ограничены числом $A + B$, поэтому он тоже сходится.

Далее, легко доказать, что левая часть не уступает правой. Для этого в силу принципа ограничения, достаточно доказать, что левая часть мажорирует частичные суммы правой. Это так ввиду очевидной цепочки неравенств:

$$\sum_{k=1}^{n}(a_k + b_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} b_k \leq sk1 + a_k + \sum_{k=1}^{\infty} b_k$$

.

Для доказательства обратного неравенства мы рассмотрим равносильное
$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \le \sum_{k=1}^{\infty}(a_k+b_k) - \sum_{k=1}^{\infty} b_k$$
В силу принципа ограничения для доказательства последнего достаточно убедиться в неравенствах
$$\sum_{k=1}^{n} a_k \le \sum_{k=1}^{\infty}(a_k+b_k) - \sum_{k=1}^{\infty} b_k$$
для частичных сумм. Перепишем последнее в такой форме:
$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k \le \sum_{k=1}^{\infty}(a_k+b_k) - \sum_{k=1}^{n} a_k$$
Но в силу того же принципа ограничения, последнее неравенство является следствием неравенств для частичных сумм
$$\sum_{k=1}^{m} b_k \le \sum_{k=1}^{\infty}(a_k+b_k) - \sum_{k=1}^{n} a_k$$
В справедливости которых, после переноса $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k$ в левую часть, нетрудно убедиться с помощью следующей цепочки неравенств
$$\sum_{k=1}^{m} b_k + \sum_{k=1}^{n} a_k \le \sum_{k=1}^{m+n}(a_k+b_k) \le \sum_{k=1}^{\infty}(a_k+b_k)$$
□

Геометрический ряд. Вернемся к рассмотрению геометрического ряда. Уравнение авторекурсии, основанное на правиле рекурсии и правиле умножения ничего не говорит о сходимости ряда. Поэтому мы должны доказать сходимость для $\sum\limits_{k=0}^{\infty} q^k$ при положительном $q < 1$. Для этого достаточно доказать при любом n неравенство
$$1 + q + q^2 + q^3 + \cdots + q^n < \frac{1}{1-q}\,.$$
Умножая обе части на $1-q$ слева получаем
$$(1-q)+(q-q^2)+(q^2-q^3)+\cdots+(q^{n-1}-q^n)+(q^n-q^{n+1}) = \\ 1-q+q-q^2+q^2-q^3+q^3-\cdots-q^n+q^n-q^{n+1} = 1-q^{n+1}$$
и мы получаем 1 справа. Неравенство $1-q^{n+1} < 1$ очевидно. Итак, сходимость доказана. Теперь уравнение авторекурсии $x = 1+qx$ для $\sum\limits_{k=0}^{\infty} q^k$

строится обычным путем с помощью правил рекурсии и почленного умножения. Оно оставляет для суммы $\sum\limits_{k=0}^{\infty} q^k$ только две возможности, или $\frac{1}{q-1}$ или ∞. Для $q < 1$ сходимость доказана, а для $q \geq 1$ правильным ответом будет бесконечность.

Обратим специальное внимание на случай $q = 0$. Мы принимаем общепринятое соглашение:

$$0^0 = 1. \tag{2.6}$$

Это значит, что ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} 0^k$ удовлетворяет общей формуле для сходящейся геометрической прогрессии $\sum\limits_{k=0}^{\infty} 0^k = \frac{1}{1-0} = 1$.

Наконец мы формулируем теорему, которая по существу принадлежит Евдоксу, доказавшему сходимость геометрического ряда со знаменателем $q < 1$.

Теорема 5 (Евдокс). *Для любого положительного q справедливо*

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q} \quad \textit{для } q < 1, \quad \textit{и} \quad \sum_{k=0}^{\infty} q^k = \infty \quad \textit{для } q \geq 1.$$

Сравнение рядов Нередко точное суммирование рядов слишком трудно, и для практических целей достаточно знать сумму приблизительно. В этом случае обычно сравнивают рассматриваемый ряд с уже известным. Такое сравнение основано на следующем *Принципе сложения неравенств*, который немедленно следует из определения суммы.

(Сложение неравенств). *Если $a_k \leq b_k$ для всех k, то $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k \leq \sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$*

Для сравнения рядов с геометрическим очень полезна следующая лемма Даламбера.

Лемма 2.1 (признак Даламбера). *Если $a_{k+1} \leq qa_k$ для некоторого $q < 1$ и всех членов ряда $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$, то $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k \leq \frac{a_0}{1-q}$*

Доказательство. По индукции доказывается неравенство $a_k \leq a_0 q^k$. И сложение неравенств позволяет оценить $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$ сверху суммой геометрического ряда $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_0 q^k = \frac{a_0}{1-q}$ □

Например, докажем с помощью признака Даламбера сходимость ряда обратных факториалов $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$. Отношение соседних членов ряда обратных факториалов равно $\frac{1}{n}$ и, в частности, меньше чем $\frac{1}{2}$, откуда немедленно вытекает его сходимость.

Этот же тест позволяет доказать сходимость ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} k2^{-k}$. Отношение последующих членов $\frac{a_{k+1}}{a_k}$ равно $\frac{k+1}{2k}$. Это отношение не превосходит

$\frac{2}{3}$ начиная с $k = 3$. Следовательно ряд, в конце концов мажорируется геометрическим рядом $\sum_{k=0}^{\infty} a_3 \frac{2^k}{3^k}$, $(a_3 = \frac{2}{3})$. Это доказывает его сходимость и уравнение авторекурсии позволяет найти сумму.

Символ бесконечность. Если частичные суммы ряда $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ неограниченно возрастают, то ряд называется расходящимся и его сумма считается бесконечной. Записывается это $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \infty$. Введение символа бесконечность позволяет сократить формулировки теорем об основных операциях с рядами, убрав из них условие сходимости, если договориться о следующих правилах оперирования с символом бесконечность.

1. $\infty + x = \infty$ при любом x, конечном и бесконечном
2. $x \cdot \infty = \infty$ при любом положительном x (конечном или бесконечном)
3. $\infty - x = \infty$ при любом конечном x

Тождество двух рядов мы будем называть *безусловным*, если оно выполнено как для сходящихся, так и для расходящихся рядов. Так безусловными тождествами являются все три доказанные выше формулы: рекурсии, умножения и сложения.

Приняв такие соглашения, мы можем оперировать с бесконечностью как с обычным числом, но у бесконечности есть одна особенность: никак нельзя вычитать бесконечность из бесконечности. Результатом такой операции считается неопределенность. Если в ваших вычислениях встретилась такая операция вы сможете получить все что угодно.

Введение символа бесконечность позволяет спасти метод авторекурсии в случае расходящихся рядов. Например, для суммы расходящегося ряда $1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots$ уравнение авторекурсии выглядит так:

$$s = 1 + 2s$$

у этого уравнения, с появлением символа ∞ появляется решение $s = \infty$, которое в случае положительного ряда и следует трактовать как единственно верное.

Парадокс гармонического ряда. Теперь мы имеем прочные теоретические основы для вычислений с положительными рядами. Дополним три доказанных выше правила обращения с рядами еще одним *правилом вычитания.*

Теорема 6. *Если при любом k справедливо неравенство $a_k > b_k$ и $\sum_{k=1}^{\infty} b_k < \infty$, то*

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k - \sum_{k=1}^{\infty} b_k = \sum_{k=1}^{\infty} (a_k - b_k)$$

Доказательство. Требуемое равенство добавлением к обеим частям суммы $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ превращается в равносильное равенство

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sum_{k=1}^{\infty} b_k + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k - b_k),$$

справедливость которого вытекает из правила почленного сложения рядов. $\square$

Рассмотрим следующее вычисление:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k(2k-1)} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k-1} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} =$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k-1} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k} \right) =$$

$$= \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k-1} \right) - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k} =$$

$$= \frac{1}{2} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k-1} \right) - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k(2k-1)}$$

Мы получаем, что сумма ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)2k}$ удовлетворяет уравнению $s = \frac{s}{2}$. Это уравнение имеет два корня: 0 и ∞. Но s, как нетрудно понять, удовлетворяет неравенствам $\frac{1}{2} < s < \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = 1$. Где ошибка?

Рассмотренный выше парадокс обусловлен расходимостью гармонического ряда. Ввиду этой расходимости не выполнены условия теоремы о почленном вычитании и приведенное рассуждение по сути является строгим доказательством расходимости гармонического ряда.

Теория вещественных чисел Евдокса-Дедекинда Искушенный читатель мог бы после сегодняшней лекции задаться вопросом: а всякий ли сходящийся ряд имеет сумму, в смысле данного выше определения? Ответ на этот вопрос предполагает отчетливое понимание того, что такое вещественное число? Например, если предполагать, что вещественное число — это бесконечная десятичная дробь, то утверждение, что всякий сходящийся ряд имеет сумму может быть строго доказано. При аксиоматическом построении теории вещественных чисел положительный ответ на этот вопрос по существу является одной из эквивалентных форм так называемой *аксиомы непрерывности.*

Однако, наиболее адекватной теорией вещественных чисел для развитой выше теории положительных рядов, является теория сечений Евдокса-Дедекинда. Древние греки не знали отрицательных чисел и именно для положительных чисел построение Евдокса особенно красиво.

Множество положительных рациональных чисел (величин) назовем *минорным*, если со всяким своим элементом оно содержит и все меньшие.

Непустое ограниченное минорное множество, не имеющее наибольшего элемента называется *минором.* Так всякое рациональное число порождает минор, состоящий из всех меньших чисел. А корню из двух соответствует минор состоящий из дробей $\frac{m}{n}$, для которых $m^2 < 2n^2$. Вещественные числа по Евдоксу — это миноры. Сумма (произведение) миноров определяется как минор, образованный суммами $x + y$ (соотв. произведениями), где x принадлежит одному, а y другому слагаемому.

При таком подходе определение бесконечной суммы не вызывает никаких проблем: минор бесконечной суммы определяется как объединение миноров частичных сумм.

Заметим, что бесконечность, органично вписывается в эту систему, а именно бесконечности соответствует минор, состоящий из всех величин. При этом операции с минором бесконечности соответствуют принятым нами соглашениям. В то же время ноль не вписывается в эту систему. Соответствующий ему минор пуст и дает пустое множество при сложении с любым минором. Не в этом ли скрыта глубокая причина того, что греки не изобрели нуля? Кстати ноля нет и в числовом типе данных real, там есть только машинный ноль.

Метод доказательства, применявшийся в сегодняшней лекции, органично сочетается с теорией Евдокса. Доказывая равенства бесконечных сумм, мы по существу доказывали совпадение их миноров. Этот древнегреческий метод называется *методом исчерпывания.* А именно, множество величин называется *исчерпывающим* некоторый минор, если для всякой величины из минора найдется большая из исчерпывающего множества. Тогда, если все элементы исчерпывающего множества не превосходят некоторой величины, то и все элементы исчерпываемого минора не превосходит этой величины. Так как частичные суммы ряда исчерпывают минор его полной суммы, то вышесказанное обосновывает, принцип исчерпывания данный в лекции.

Доказательства методом исчерпывания по существу игнорируют проблему расходимости. Ведь бесконечность тоже характеризуется своим минором.

Задачи.

1. Доказать, что $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} < 2$
2. Доказать, что $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{2^k}{k!} < 8$
3. Найти целую часть от $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{2^k}{k!}$
4. Доказать $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{2^k} < \infty$
5. Доказать $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{k^{1000}}{1.1^k} < \infty$

3 Неупорядоченные суммы.

Не всегда числа, которые подлежат суммированию, имеют структуру ряда, то есть образуют последовательность. Приходится также суммировать числа, заполняющие бесконечные таблицы, (двойные ряды) и более сложные структуры. Так (прямое) произведение двух числовых рядов $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ и $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ имеет структуру *двойного ряда* $\sum\limits_{j,k=1}^{\infty} a_j b_k$, а прямое произведение двойного ряда на обычный имеет структуру тройного ряда и т.д. Элементы двойного ряда индексируется парами натуральных чисел, тройного — тройками и т.д. Иногда рассматриваются ряды, индексированные целыми числами, как положительными, так и отрицательными. Чтобы развить теорию, включающую в себя все перечисленные возможности, вводится общее понятие *числового массива* как индексированного множества чисел $\{a_i\}_{i\in I}$ с индексным множеством I произвольной природы.

Сумма неупорядоченного массива. Рассмотрим массив $\{a_i\}_{i\in I}$ неотрицательных чисел, индексированный элементами произвольного множества I.

Любая сумма типа $\sum\limits_{i\in I'} a_i$, где I' — конечное подмножество в I называется *частичной* суммой массива $\{a_i\}_{i\in I}$ по K.

Определение. *Наименьшее число, мажорирующее все частичные суммы массива $\{a_i\}_{i\in I}$, называется его (полной) суммой и обозначается* $\sum\limits_{i\in I} a_i$

Принципы исчерпывания и "часть меньше целого"формулируются для неупорядоченных сумм точно также как для рядов.

Коммутативность. В случае $I = \mathbb{N}$ мы, на первый взгляд, получили новое определение суммы. Но, к счастью, это определение равносильно прежнему. Действительно, любая неупорядоченная частичная сумма положительного ряда, очевидно, не превосходит полной (упорядоченной) суммы, неупорядоченная сумма поэтому также не превосходит ее. С другой стороны, любая упорядоченная частичная сумма может рассматриваться и как неупорядоченная частичная сумма. Это влечет противоположное неравенство. Следовательно мы установили равенство.

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sum_{k\in\mathbb{N}} a_k$$

Это означает, что положительные ряды подчиняются закону коммутативности сложения. Потому что неупорядоченная сумма, очевидно, не зависит от порядка слагаемых.

Формула объединения сумм. Пусть дано семейство попарно непересекающихся $I_k \cap I_j = \varnothing$ подмножеств $\{I_k\}_{k\in K}$ множества I, объединение которых дает все $I = \bigcup_{k\in K} I_k$. Такое семейство называется *разбиением* множества I и записывается $\bigsqcup_{k\in K} I_k$.

Теорема 1. *Для любого разбиения $I = \bigsqcup_{j\in J} I_j$ индексного множества $\{a_i\}_{i\in I}$ неотрицательных чисел имеет место безусловное равенство*

$$\sum_{i\in I} a_i = \sum_{j\in J}\sum_{i\in I_j} a_i. \tag{3.1}$$

Доказательство. Доказательство этого равенства начнем со случая объединения двух сумм, то есть для случая, когда J содержит два элемента. В этом случае доказательство буквально повторяет доказательство формулы сложения для рядов. После этого доказательство формулы для конечного J доказывается индукцией по числу его элементов.

Справедливость формулы (9.7) в общем случае состоит из доказательства пары неравенств. То что левая часть (9.7) не превосходит правую, в силу принципа исчерпывания, вытекает из неравенств

$$\sum_{i\in I'} a_i = \sum_{j\in J'}\sum_{i\in I'_j} a_i \le \sum_{j\in J'}\sum_{i\in I_j} a_i \le \sum_{j\in J}\sum_{i\in I'_j} a_i, \tag{3.2}$$

где I' является произвольным конечным подмножеством в I, J' — обозначает конечное множество тех $j \in J$, для которых непусто $S'_j = S_j \cup I'$. Оба неравенства в (3.2) следуют из принципа "часть меньше целого", применяемого сначала к внутренним суммам (по S_j), а потом к внешней сумме (по J).

Справедливость противоположного неравенства, в силу принципа исчерпывания, вытекает из неравенств для частичных сумм

$$\sum_{j\in J'}\sum_{i\in I_j} a_i \le \sum_{i\in I} a_i \tag{3.3}$$

Но для конечного J' справедливость формулы объединения уже была установлена выше, поэтому, левая часть в (3.3) равна $\sum\limits_{i\in I'} a_i$, где $I' = \bigcup_{j\in J'} I_j$ и неравенство (3.3), а вместе с ним и неравенство (**??**) вытекают из следующего очевидного неравенства

$$\sum_{i\in I'} a_i \le \sum_{i\in I} a_i, \tag{3.4}$$

справедливого при любом (в том числе бесконечном) подмножестве $I' \subset I$. $\square$

Суммирование знакопеременных массивов. Для любого вещественного числа x определим два неотрицательных числа его *положительную* x^+ и *отрицательную* x^- *части* как

$$x^+ = \frac{x+|x|}{2} \qquad \text{и} \qquad x^- = \frac{|x|-x}{2}.$$

Следующие тождества характеризуют положительную и отрицательную части x

$$x^+ + x^- = |x| \qquad x^+ - x^- = x \tag{3.5}$$

Числовой массив $\{a_i\}_{i\in I}$ называется *абсолютно суммируемым*, если

$$\sum_{i\in I}\{a_i\}_{i\in I}|a_i| < \infty.$$

Вся теория суммирования, развитая выше для положительных массивов, без изменений распространяется на абсолютно суммируемые массивы, если определить сумму последнего следующим равенством:

$$\sum_{i\in I} a_i = \sum_{i\in I} a_i^+ - \sum_{i\in I} a_i^- \tag{3.6}$$

Иными словами из суммы всех положительных слагаемых вычитается сумма модулей отрицательных слагаемых. (массивы в правой части суммируемы ввиду неравенств $a_i^+ \le |a_i|$, $a_i^- \le |a_i|$ и условия абсолютной суммируемости $\{a_i\}_{i\in I}$).

Лемма 3.1. *Если массивы $\{a_i\}_{i\in I}$ и $\{b_i\}_{i\in I}$ абсолютно суммируемы, то абсолютно суммируем также и массив их разностей и имеет место равенство*

$$\sum_{i\in I}(a_i - b_i) = \sum_{i\in I} a_i - \sum_{i\in I} b_i \tag{3.7}$$

Доказательство. Суммирование неравенств $|a_i - b_i| \le |a_i| + |b_i|$ доказывает абсолютная суммируемость массива разностей. Представляя все суммы в (3.7) в виде разностей положительных и отрицательных частей, получаем равносильное равенство

$$\sum_{i\in I}(a_i - b_i)^+ - \sum_{i\in I}(a_i - b_i)^- = \sum_{i\in I} a_i^+ - \sum_{i\in I} a_i^- - \sum_{i\in I} b_i^+ + \sum_{i\in I} b_i^- \tag{3.8}$$

После переносов сумм с минусами в противоположные части преобразуем равенство (3.8) к виду

$$\sum_{i\in I}(a_i - b_i)^+ + \sum_{i\in I} a_i^- + \sum_{i\in I} b_i^+ = \sum_{i\in I}(a_i - b_i)^- + \sum_{i\in I} a_i^+ + \sum_{i\in I} b_i^- \tag{3.9}$$

Так как все массивы положительны возможно почленное сложение массивов как в левой, так и в правой частях последнего равенства. В результате получаем равносильное равенство

$$\sum_{i\in I}((a_i - b_i)^+ + a_i^- + b_i^+) = \sum_{i\in I}((a_i - b_i)^- + a_i^+ b_i^-) \tag{3.10}$$

Но это равенство верно в силу следующего тождества,

$$(x-y)^+ + x^- + y^+ = x^+ + y^- + (x-y)^-,$$

Справедливость которого доказывается переносами слагаемых между частями:

$$(x-y)^+ - (x+y)^- = (x^+ - x^-) - (y^+ - y^-),$$

что верно в силу тождества $x^+ - +x^- = x$. $\square$

Теперь мы докажем, что правило объединения сумм остается справедливым для абсолютно суммируемых массивов.

Теорема 2. *Для любого абсолютно суммируемого числового массива* $\{a_i\}_{i\in I}$ *и любого разбиения множества индексов* $I=\bigcup_{j\in J} I_j$ *имеет место равенство*

$$\sum_{i\in I} a_i = \sum_{j\in J}\sum_{i\in I_j} a_i. \tag{3.11}$$

так что при любом $j\in J$ *абсолютно суммируем массив* $\{a_i\}_{i\in I_j}$, *абсолютно суммируемым является массив сумм* $\{\sum\limits_{i\in I_j} a_i\}_{j\in J}$ *и абсолютная суммируемость левой части, в свою очередь, вытекает из этих условий.*

Доказательство. Во-первых заметим, что абсолютная суммируемость массивов в правой части в левой частях вытекает из тождества (9.7) для массива модулей $|a_i|$.

Для положительных и отрицательных частей чисел правило объединения сумм справедливо, поэтому имеем равенства:

$$\sum_{i\in I} a_i^+ = \sum_{j\in J}\sum_{i\in I_j} a_i^+ \tag{3.12}$$

$$\sum_{i\in I} a_i^- = \sum_{j\in J}\sum_{i\in I_j} a_i^- \tag{3.13}$$

Вычитание нижнего неравенства из верхнего дает в левой части $\sum\limits_{i\in I} a_i$, а разность правых частей, двукратным применением леммы о разности сумм преобразуется в $\sum\limits_{j\in J}\sum\limits_{i\in I_j}$:

$$\sum_{j\in J}\sum_{i\in I_j} a_i^+ - \sum_{j\in J}\sum_{i\in I_j} a_i^- = \sum_{j\in J}\left(\sum_{i\in I_j} a_i^+ - \sum_{i\in I_j} a_i^-\right) = \sum_{j\in J}\sum_{i\in I_j}(a_i^+ - a_i^-)$$

□

Теорема умножения

Теорема 3. *Для абсолютно суммируемого массива, абсолютно суммируем массив его произведений на фиксированное число и имеет место равенство*

$$\alpha\sum_{i\in I} a_i = \sum_{i\in I}\alpha a_i \tag{3.14}$$

Доказательство. Правило почленного умножения для положительных чисел дает доказательство первого утверждения теоремы ввиду безусловных равенств $\sum\limits_{i\in I}|\alpha a_i| = \sum\limits_{i\in I}|\alpha||a_i| = |\alpha|\sum\limits_{i\in I}|a_i|$.

Пусть $\alpha=-1$. Так как для любого x имеем очевидные тождества:

$$(-x)^+ = x^- \qquad (-x)^- = x^+, \tag{3.15}$$

то непосредственно из определения суммы массива вытекает следующее *правило изменения знака*:

$$\sum_{i\in I}(-a_i) = -\sum_{i\in I} a_i \tag{3.16}$$

Теперь, опираясь на правила почленного сложения и правило изменения знака, имеем:

$$\alpha\sum_{i\in I} a_i = (\alpha^+ - \alpha^-)\sum_{i\in I}(a_i^+ - a_i^-) = \alpha^+\sum_{i\in I} a_i^+ - \alpha^+\sum_{i\in I} a_i^- - \alpha^-\sum_{i\in I} a_i^+ + \alpha^-\sum_{i\in I} a_i^-$$

Теперь, воспользовавшись правилом почленного умножения для положительных рядов, можем продолжить эту цепочку равенств

$$= \sum_{i\in I}\alpha^+ a_i^+ - \sum_{i\in I}\alpha^+ a_i^- - \sum_{i\in I}\alpha^- a_i^+ + \sum_{i\in I}\alpha^- a_i^- = \sum_{i\in I}(\alpha^+ - \alpha^-)(a_i^+ - a_i^-) = \sum_{i\in I}\alpha a_i.$$

$\square$

Формула прямого произведения *Прямым произведением* числовых массивов $\sum\limits_{i\in I} a_i$ и $\sum\limits_{j\in J} b_j$ называется массив $\sum\limits_{i,j\in I\times J} a_i b_j$.

Теорема 4. *Для любых абсолютно суммируемых числовых массивов их прямое произведение абсолютно суммируемо и выполнено равенство*

$$\sum_{i,j\in I\times J} a_i b_j = \left(\sum_{j\in J} b_j\right)\left(\sum_{i\in I} a_i\right)$$

Доказательство. Двойная сумма $\sum\limits_{i,j\in I\times J} a_i b_j$, в силу теоремы об объединении сумм, равна повторной сумме

$$\sum_{i\in I}\sum_{j\in J} a_i b_j$$

Поскольку во внутренней сумме множитель a_i не зависит от индекса суммирования, постольку его можно вынести за знак внутренней суммы и получить

$$\sum_{i,j\in I\times J} a_i b_j = \sum_{i\in I}\left(a_i\sum_{j\in J} b_j\right)$$

Теперь заметим, что внутренняя сумма не зависит от индекса суммирования внешней суммы и потому может быть вынесена за пределы внешней суммы, как постоянный множитель. В итоге получаем формулу умножения из формулировки теоремы. $\square$

Задачи.

1. Вычислить $\sum\limits_{i,j=1}^{\infty} \frac{1}{2^i 3^j}$

2. Вычислить $\sum\limits_{i,j=1}^{\infty} \frac{i}{2^i 3^j}$

3. Вычислить $\sum\limits_{i,j=1}^{\infty} \frac{i+j}{2^i 3^j}$

4. Вычислить $\sum\limits_{i,j \in N} \dfrac{ij}{2^i 3^j}$.

5. Изменить порядок суммирования $\sum\limits_{i=0}^{\infty} \sum\limits_{j=0}^{2i} a_{ij}$.

6. Представить неупорядоченную сумму $\sum\limits_{i+j<n} a_{ij}$ как двойную.

7. Доказать формулу Дирихле

$$\sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{k} a_{ki} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=i}^{n} a_{ki}.$$

4 Телескопические суммы и разности

Цель сегодняшней лекции — получить формулы коэффициентов для степеней геометрического ряда. В результате мы научимся, в частности, суммировать ряды вида $\sum\limits_{k=0}^{\infty} k^n x^n$. Основной результат выглядит так:

$$\frac{1}{(1-x)^n} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^{\underline{n-1}}}{(n-1)!} x^n, \tag{4.1}$$

где $x^{\underline{n}} = x(x-1)(x-2)\dots(x-n+1)$ называется n-ой *факториальной степенью* числа x. В частности, $x^{\underline{0}} = 1$ и $x^{\underline{1}} = x$.

Будем доказывать эту формулу индукцией по степени n. Для $n = 1$ формула (4.1) превращается в известную нам формулу суммы геометрического ряда. Предположим, что формула верна для n, тогда, умножая левую часть равенства (4.1) на $\frac{1}{1-x}$, а правую часть — на $\sum\limits_{k=0}^{\infty} x^k$ мы также получим верную формулу. При этом произведение ряда в правой части (4.1) на геометрический будет иметь коэффициент при x^k равный

$$\frac{1}{(n-1)!}(1^{\underline{n-1}} + 2^{\underline{n-1}} + \dots + (k-1)^{\underline{n-1}}),$$

как это следует из приведенной ниже теоремы Коши. Поэтому задача сводится к доказательству, что приведенное выше выражение равно $\frac{k^{\underline{n}}}{n!}$.

Теорема Коши об умножении рядов *Сверткой* или *произведением Коши* рядов $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$ и $\sum\limits_{k=0}^{\infty} b_k$ называется ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n$, где $c_n = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$

Теорема 1. *Если абсолютно сходятся ряды $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$ и $\sum\limits_{k=0}^{\infty} b_k$, то абсолютно сходится их свертка и имеет место равенство*

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \sum_{k=0}^{\infty} b_k$$

Доказательство. Массив $\{a_k b_j\}_{k,j=0}^{\infty}$ абсолютно суммируем, потому что имеем безусловные равенства

(4.2)
$$\sum_{j,k=0}^{\infty} |a_k||b_j| = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} |a_k||b_j| = \sum_{k=0}^{\infty}\left(|a_k|\sum_{j=0}^{\infty}|b_j|\right) = \left(\sum_{k=0}^{\infty}|a_k|\right)\left(\sum_{j=0}^{\infty}|b_j|\right),$$

поэтому абсолютная суммируемость двойного ряда вытекает из условий теоремы. Теперь абсолютная суммируемость двойного ряда позволяет повторить выкладки (4.2) уже без модулей. □

Элементарная теория суммирования. Для решения возникшей задачи мы разработаем подход к общей проблеме суммирования: как для данной функции $f(x)$ получить формулу для суммы ее n последовательных значений? Предположим, что искомая формула получена, то есть найдена функция $F(x)$ такая, что при любом натуральном n имеем равенство

$$F(n) = \sum_{k=1}^{n-1} f(k), \tag{4.3}$$

тогда $F(1) = 0$ и при любом $n \geq 1$ будет

$$F(n+1) - F(n) = f(n). \tag{4.4}$$

Предположим, теперь, наоборот, что нам известна функция $F(x)$, удовлетворяющая последнему равенству при $n \geq 1$. Тогда сумма $\sum\limits_{k=1}^{n-1} f(k)$ может быть записана в виде суммы разностей

$$(F(2) - F(1)) + (F(3) - F(2)) + \cdots + (F(n) - F(n-1)).$$

Раскрытие скобок в такого рода суммах приводят к массовым сокращениям, в результате которых остается разность $F(n) - F(1)$ и если, дополнительно, предположить, что $F(1) = 0$, то мы получаем, что $F(x)$ является суммирующей функцией для $f(x)$ в смысле (4.3).

Разностью функции $f(x)$ называется обозначаемая $\Delta f(x)$ функция, определяемая следующим соотношением:

$$\Delta f(x) = f(x+1) - f(x) \tag{4.5}$$

Как мы убедились выше, задача нахождения суммирующей формулы равносильна задаче нахождения функции $F(x)$, имеющей данную $f(x)$ в качестве своей разности $\Delta F(x) = f(x)$. Эту задачу мы будем называть *задачей телескопирования*, а решающую ее функцию $F(x)$ мы будем также называть *телескопирующей* для $f(x)$ и использовать запись $F(x) = \Delta^{-1} f(x)$ как эквивалент записи $\Delta F(x) = f(x)$. Применение термина *телескопический* в данном контексте мотивировано общепринятым термином *телескопическая сумма*. Это название используется для сумм вида $\sum\limits_{k=0}^{n} (a_{k+1} - a_k)$. Значение телескопической суммы определяется значениями первого и последнего из a_k, подобно телескопу, толщина которого определяется радиусами внешнего и внутреннего колец.

Для данной последовательности $\{a_k\}$ обозначим $\{\Delta a_k\}$ последовательность разностей $\Delta a_k = a_{k+1} - a_k$ и назовем эту последовательность *разностью* последовательности $\{a_k\}$. Главная формула элементарной теории суммирования такова:

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} \Delta a_k = a_n - a_0} \tag{4.6}$$

Факториальные степени. Разработанную теорию суммирования применим теперь к факториальным степеням. Вычисление разности для факториальной степени дано ниже:

$$(x+1)^{\underline{k}} - x^{\underline{k}} = (x+1)x^{\underline{k-1}} - x^{\underline{k-1}}(x-k+1) = kx^{\underline{k-1}}$$

В результате мы получаем следующую важную формулу:

$$\boxed{\Delta x^{\underline{n}} = n x^{\underline{n-1}}}, \tag{4.7}$$

из которой немедленно вытекает равенство

$$\frac{m^{\underline{n}}}{n!} = \frac{1}{(n-1)!}\sum_{k=1}^{m-1} k^{\underline{n-1}},$$

которое, как мы показали выше, влечет (4.1).

Многочлен Ньютона. Итак, мы научились находить конечные суммы вида $\sum\limits_{k=1}^{n} k^{\underline{n}}$ и бесконечные вида $\sum\limits_{k=1}^{\infty} k^{\underline{n}} x^k$. Для нахождения такого типа сумм, в которых вместо факториальных степеней стоят обычные достаточно научится представлять обычные степени в виде так называемых *факториальных многочленов*, то есть выражений вида $\sum\limits_{k=0}^{n} a_k x^{\underline{k}}$. Потому, что факториальный многочлен $\sum\limits_{k=0}^{n} a_k x^{\underline{k}}$ телескопируется факториальным многочленом $\sum\limits_{k=0}^{n} a_k \frac{x^{\underline{k+1}}}{k+1}$.

Например, $x^2 = x^{\underline{2}} + x$, поэтому $\Delta^{-1}x^2 = \frac{x^{\underline{3}}}{3} + \frac{x^{\underline{2}}}{2}$, откуда немедленно получаем такую формулу для суммы квадратов

$$\sum_{k=1}^{n-1} k^2 = \frac{n(n-1)(n-2)}{3} + \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n(n-1)(2n+1)}{6} \tag{4.8}$$

Определим высшие разности $\Delta^k f(x)$ функции по индукции: $\Delta^0 f(x) = f(x)$, $\Delta^{k+1} f(x) = \Delta(\Delta^k f(x))$. Для функции $f(x)$ ее *интерполяционный ряд Ньютона* определяется следующей формулой

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Delta^k f(0)}{k!} x^{\underline{k}}. \tag{4.9}$$

Частичная сумма интерполяционного ряда $\sum\limits_{k=0}^{n} \frac{\Delta^k f(0)}{k!} x^{\underline{k}}$ представляет собой (факториальный) многочлен n-степени, совпадающий с функцией $f(x)$ в точках $0, 1, \ldots, n$ (узлах интерполяции). Такой многочлен однозначно определен и называется *интерполяционным многочленом.* Интерполяционный многочлен позволяет дать разумные оценки для значений функции в любых точках, в ситуации, когда ее значения известны лишь в некоторых так называемых узлах интерполяции.

Как мы сейчас докажем, для многочлена его интерполяционный ряд содержит лишь конечное число ненулевых членов, и сумма его совпадает с исходным многочленом. Таким образом интерполяционный ряд оказывается эффективным средством для представления степеней факториальными многочленами.

Вывод формулы Ньютона.

Лемма 4.1. *Коэффициенты любого факториального многочлена* $P(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k x^{\underline{k}}$ *выражаются через его разности по формулам* $a_k = \frac{\Delta^k P(0)}{k!}$

Доказательство. Действительно,

$$\Delta^m \sum_{k=0}^{n} a_k x^{\underline{k}} = \sum_{k=0}^{n} a_k \Delta^m x^{\underline{k}} = \sum_{k=m}^{n} a_k k^{\underline{m}} x^{\underline{k}} x^{\underline{k-m}}.$$

Подставляя $x = 0$ получаем в этой сумме нулевые слагаемые за единственным исключением $k = m$. То есть получаем $\Delta^m P(0) = m^{\underline{m}} a_m = m! a_m$. $\square$

Лемма 4.2. *Всякий обычный многочлен является и факториальным многочленом.*

Доказательство. Для многочленов степени один утверждение очевидно. Пусть оно доказано для многочленов степени n. Рассмотрим любой многочлен $P(x)$ степени $n+1$ со старшим коэффициентом a_n. Тогда $P(x) - a_n x^{\underline{n}}$ очевидно имеет степень не большую n и по индукционному предположению является факториальным многочленом. Поэтому и $P(x)$ является таковым, как сумма двух факториальных многочленов. $\square$

Лемма 4.3. *Для любого многочлена* $P(x)$*, его разность* $\Delta P(x)$ *является многочленом на единицу меньшей степени.*

Доказательство. Для факториальных многочленов утверждение очевидно. А так как всякий обычный многочлен является факториальным, то оно верно для обычных многочленов. $\square$

Теорема 2 (Формула Ньютона). *Для любого многочлена* $P(x)$ *имеет место равенство.*

$$P(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Delta^k P(0)}{k!} x^{\underline{k}} \tag{4.10}$$

Доказательство. В силу леммы 4.2 $P(x)$ является факториальным многочленом, коэффициенты которого определяются на основании леммы 4.1. $\square$

Треугольник разностей. Практическое вычисления, основанные на применении интерполяционной формулы Ньютона, оформляются в виде *треугольника разностей*, левый столбец которого представляет собой совокупность значений интерполируемой функции в узлах интерполяции $f(0), f(1), \ldots, f(n)$. Второй столбец состоит из разностей $\Delta f(0), \Delta f(1), \ldots, \Delta f(n-1)$ и на одну клетку короче первого. Каждый следующий столбец получается вычислением разностей из предыдущего и короче предыдущего на одну клетку. Последний столбец состоит из одной единственной клетки, содержащей $\Delta^n f(0)$.

Отрицательные факториальные степени Факториальные степени удовлетворяют следующему *правилу сложения*

$$x^{\underline{k+m}} = x^{\underline{k}}(x-k)^{\underline{m}}. \tag{4.11}$$

При определении отрицательных факториальных степеней исходят из этого правила. Поэтому $x^{\underline{-k}}$ для натурального k определяется формулой

$$x^{\underline{-k}} = \frac{1}{(x+1)(x+2)\dots(x+k)} \tag{4.12}$$

Мы предоставляем читателю самостоятельно проверить справедливость этого правила сложения для всех целых m, k. Разность для отрицательных степеней задается, той же самой формулой, что и для положительных. Отрицательные факториальные степени дают ряды принципиально нового типа. Простейший из которых представляет собой ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}$, суммирование которого основано на тождестве:

$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\,.$$

Благодаря этому тождеству сумма $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}$ превращается в сумму разностей

$$\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\dots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)+\dots \tag{4.13}$$

И n-я частичная сумма ряда равняется $1-\frac{1}{n+1}$. Теперь нетрудно доказать, что единица является наименьшим числом превосходящим все числа вида $1-\frac{1}{n+1}$. Во-первых, очевидно, что 1 мажорирует все частичные суммы. Во-вторых, для любого меньшего числа $1-\varepsilon$ число $1-\frac{1}{n+1}$ превзойдет его, при $n+1 > \frac{1}{\varepsilon}$. Таким образом установлено, что полная сумма ряда (4.13) равна единице.

Рассмотренный пример дает повод к принятию соглашения $\frac{1}{\infty} = 0$. А именно, подстановка в формулу частичной суммы бесконечности в качестве числа слагаемых, с использований принятых нами правил вычислений с бесконечностью дает правильный ответ для полной суммы ряда.

Правда, такого рода вычисления, не всегда дают результат. Например, мы могли бы записать формулу частичной суммы в виде $\frac{n}{n+1}$. Подстановка в такую формулу бесконечности приводит к неопределенности вида $\frac{\infty}{\infty}$. Поэтому вычисление значения арифметического выражения, в котором участвует бесконечность (бесконечно-большая величина) требует некоторого искусства.

Задачи.

1. Чему равна полная сумма ряда, если его частичная сумма задается формулой $\frac{n^2+1}{2n^2-1}$?

2. Вычислить отношение $\frac{n^{\underline{k}}}{n^k}$ для бесконечно большого n.

3. Вычислить $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+2)}$

4. Вычислить $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)(k+2)}$

5. Вычислить $\Delta^n x^{\underline{n}}$

6. Суммировать $1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + 3 \cdot 4 \cdot 5 + \cdots + 100 \cdot 101 \cdot 102$

7. Представить $x^{\underline{3}} x^{\underline{4}}$ факториальным многочленом.

8. С помощью формулы Ньютона телескопировать x^3 и вычислить $1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + \cdots + 99^3$

9. Если $\Delta a_k \geq \Delta b_k$ для всех k и $a_1 \geq b_1$ то $a_k \geq b_k$ для всех k

10. С помощью формулы Ньютона телескопировать x^5 и вычислить сумму $1000^5 + 1001^5 + \cdots + 9999^5$

11. Вывести формулу для разности произведения. Получить с ее помощью преобразование Абеля: $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k \Delta b_k = \sum\limits_{k=1}^{n} b_{k+1} \Delta a_k + a_{n+1} b_{n+1} - a_1 b_1$

12. Вывести формулу, выражающую k-ую разность через значения функции

13. Если $\Delta a_k \geq \Delta b_k$ для всех k и $a_1 \geq b_1$ то $a_k \geq b_k$ для всех k

14. Используя $\Delta 2^n = 2^n$, доказать что $P(n) < 2^n$ в конце концов выполняется для любого многочлена $P(x)$.

15. Вычислить разность $\Delta \sin x$ и посчитать сумму $\sum\limits_{1}^{n} \cos k$

16. Доказать неравенство Архимеда $\frac{n^3}{3} \leq \sum\limits_{k=1}^{n} k^2 \leq \frac{(n+1)^3}{3}$

17. Доказать неравенства $\frac{1}{n} \geq \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \geq \frac{1}{n+1}$

18. * Доказать $\frac{1}{x} = \sum\limits_{k=1}^{\infty} (k-1)! x^{\underline{-k}}$.

5 Бином Ньютона

Следующая формула, открытая Ньютоном, носит название *биномиального ряда*

$$(1+x)^y = 1+y\cdot x+\frac{y(y-1)}{2}x^2+\frac{y(y-1)(y-2)}{3!}x^3+\frac{y(y-1)(y-2)(y-3)}{4!}x^4+\dots$$

Открытие биномиального ряда Ньютон считал своим величайшим открытием. Биномиальный ряд выгравирован на его надгробье в Вестминстерском кладбище. И роль этого открытия в дальнейшем развитии математики трудно переоценить. С использованием факториальных степеней биномиальный ряд записывается особенно красиво.

$$\boxed{(1+x)^y = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k y^{\underline{k}}}{k!}} \tag{5.1}$$

Бином Ньютона. Для целых неотрицательных $k \leq n$ через C_n^k обозначается коэффициент при x^k у многочлена, возникающего из возведения двучлена (бинома) $1+x$ в степень n. Таким образом по определению *биномиальных коэффициентов* (именно так называются числа C_n^k) имеет место равенство:

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k. \tag{5.2}$$

Если в этой формуле умножить обе части равенства на $(1+x)$, то в левой части мы получим $(1+x)^{n+1}$, а в правой — сумму $C_n^0 + \sum\limits_{k=1}^{n}(C_n^k + C_n^{k-1})x^k + C_n^n x^{n+1}$.

Откуда немедленно следует такое правило сложения биномиальных коэффициентов

$$C_n^k + C_n^{k-1} = C_{n+1}^k \tag{5.3}$$

Кроме того оттуда вытекают такие равенства для крайних коэффициентов

$$C_n^0 = C_{n+1}^0 \qquad C_n^n = C_{n+1}^{n+1} \tag{5.4}$$

Лемма 5.1. *Правило сложения* (5.3) *и равенства крайних коэффициентов* (5.4) *определяют единственную двойную последовательность, для которой $C_0^0 = 1$.*

Доказательство. Во-первых заметим, что из равенств (5.4) немедленно получается, что $C_n^0 = C_n^n = 1$ при любом натуральном n.

Далее построение двойной последовательности C_n^k производится с помощью пары вложенных циклов. Внешний по n (от единицы), внутренний по k (от единицы до n). Внутренний цикл определяет C_{n+1}^k исходя из уже известных C_n^k и C_n^{k-1} по правилу сложения (5.3). □

И. Ньютоном, была получена следующая формула для биномиальных коэффициентов:

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!} \tag{5.5}$$

Доказательство этой формулы немедленно получается из (5.1) ввиду тождества

$$\frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!} = \frac{(n+1)!}{k!(n+1-k)!} \tag{5.6}$$

Так как $(a+b)^n = a^n(1+\frac{b}{a})^n$, то из полученных результатов получается следующая знаменитая формула, известная под именем *бином Ньютона*

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} a^k b^{n-k} \tag{5.7}$$

Факториальный бином. Поскольку $(1+x)^n(1+x)^m = (1+x)^{n+m}$, постольку коэффициенты при x^p в левой и правой частях равенства должны совпадать. Коэффициент в правой части имеет вид C_{m+n}^p, а в левой части представляется в виде суммы $\sum\limits_{k=0}^{p} C_n^k C_m^{p-k}$. Записывая это равенство с заменой биномиальных коэффициентов на факториальные степени ($C_n^k = \frac{n^{\underline{k}}}{k!}$) мы приходим к следующему тождеству

$$\frac{(m+n)^{\underline{p}}}{p!} = \sum_{k=0}^{p} \frac{n^{\underline{k}}}{k!} \frac{m^{\underline{p-k}}}{((p-k)!} \tag{5.8}$$

Умножая обе части тождества на $p!$, получаем следующее равенство:

$$(m+n)^{\underline{p}} = \sum_{k=0}^{p} C_p^k n^{\underline{k}} m^{\underline{p-k}} \tag{5.9}$$

Это равенство доказано нами для любых натуральных m и n, для которых $m+n \geq p$. Оказывается это равенство справедливо при любых действительных m и n. Действительно, при фиксированном n в левой и правой частях тождества мы имеем многочлены, от m степени p, совпадающие в бесконечном числе точек. Поэтому такие многочлены совпадают тождественно. Следовательно, равенство (5.10) справедливо для любого m и натурального $n > p - m$. Теперь фиксируем m. Тогда слева и справа мы имеем многочлены от n степени p совпадающие в бесконечном множестве точек, а потому тождественно равные. Таким образом, для любых действительных x и y при любом натуральном p справедливо равенство, аналогичное простому биному Ньютона и называемое *факториальным биномом:*

$$(x+y)^{\underline{p}} = \sum_{k=0}^{p} C_p^k x^{\underline{k}} y^{\underline{p-k}} \tag{5.10}$$

Теорема о произведении биномиальных рядов

Теорема 1. *Биномиальный ряд* $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{y^{\underline{k}} x^k}{k!}$ *абсолютно сходится при* $|x| < 1$ *и при любых* y_1 *и* y_2 *имеет место равенство.*

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{y_1^{\underline{k}} x^k}{k!} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{y_2^{\underline{k}} x^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(y_1 + y_2)^{\underline{k}} x^k}{k!}$$

Доказательство. Признак Даламбера позволяет доказать абсолютную сходимость биномиального ряда $(1+x)^y = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{y^{\underline{k}} x^k}{k!}$ для $x < 1$. Действительно, отношение соседних членов биномиального ряда выражается формулой $x(y-k)/k$. Пусть $q = \sqrt{|x|} > |x|$. Тогда $q < 1$ и неравенство $|x(y-k)/k| < q$ выполняется при $k > \frac{xy}{q-|x|}$.

Произведение биномиальных рядов $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{a^{\underline{k}} x^k}{k!}$ и $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{b^{\underline{k}} x^k}{k!}$ по теореме Коши равняется сумме ряда, формула n-го члена которого есть $\sum\limits_{k=0}^{n} \frac{a^{\underline{k}} b^{\underline{n-k}}}{k!(n-k)!} x^n$, что в силу факториального бинома совпадает с $\frac{(a+b)^{\underline{n}}}{n!} x^n$. То есть в результате умножения биномиальных рядов мы опять получаем биномиальный ряд. □

Биномиальная теорема для рациональных показателей Итак, при умножении биномиальных рядов получается биномиальный ряд с показателем равным сумме показателей сомножителей. Если показатель биномиального ряда является рациональным числом вида $\frac{m}{n}$, то при возведении этого ряда в m-ую степень получится конечный биномиальный ряд представляющий $(1+x)^m$ в силу простой биномиальной теоремы. Следовательно, исходный ряд представляет $(1+x)^{\frac{m}{n}}$, что и доказывает биномиальную теорему для биномиальных рядов с рациональным показателем.

Биномиальный ряд для иррациональных показателей.

Лемма 5.2. *Если* $y \geq -1$ *и* $xy > 0$, *то* $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{y^{\underline{k}} x^k}{k!} > 1$

Доказательство. Отношение $(k+1)$-го члена биномиального ряда к k-му выражается величиной $x\frac{y-k}{k+1}$ по абсолютной величине меньшей единицы при $y \geq -1$. А знак у следующего члена ряда сохраняется, если $x < 0$ и меняется на противоположный, если $x > 0$. В любом случае все нечетные члены ряда имеют одинаковый знак и они положительны, ибо по условию положителен первый член ряда. Поэтому

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{y^{\underline{k}} x^k}{k!} = 1 + \sum_{k=0}^{\infty} \left(\left| \frac{y^{\underline{2k-1}} x^{2k-1}}{(2k-1)!} \right| - \left| \frac{y^{\underline{2k}} x^{2k}}{(2k)!} \right| \right) > 1,$$

так как все скобки в правой части положительны. □

Теорема 2. *Сумма биномиального ряда положительна и монотонно зависит от показателя.*

Доказательство. Сумму биномиального ряда (с фиксированным x) показателем y будем обозначать $\beta(y)$. Так как $\beta(y)\beta(-y) = \beta(0) = 1$, то $\beta(y)$ и $\beta(-y)$ имеют одинаковые знаки. А так как одно из этих чисел больше единицы в силу леммы 5.2, то оба они положительны.

Пусть $y_2 > y_1$, тогда в силу теоремы **1** имеем $\beta(y_2)/\beta(y_1) = \beta(y_2 - y_1)$, что больше единицы при $x > 0$ и меньше единицы при $x < 0$, в силу леммы 5.2. Таким образом, в первом случае $\beta(y)$ монотонно возрастает, а во втором — монотонно убывает. $\square$

Значение степени a^y для иррационального y определяется так, чтобы оно было заключено между значениями степеней рациональных чисел, если показатель заключен между этими рациональными числами. А так как, определенная биномиальным рядом функция монотонна и в рациональных точках совпадает с обычной степенью, то единственным числом, определяемым этой процедурой будет как раз сумма биномиального ряда $(1+x)^y$ при $x = a - 1$. Поэтому биномиальное разложение Ньютона справедливо и для иррациональных показателей.

Эйлерово вычисление $\sqrt{2}$. Практическое применение биномиального ряда для вычислений ограничивается случаем показателя y по модулю меньшего единицы. В первую очередь, он применяется для вычисления корней, то есть для $y = \frac{1}{n}$.

Так Эйлер в своем "Введении "предложил следующий алгоритм вычисления $\sqrt{2}$. Поскольку $\frac{7}{10}\sqrt{2} = \sqrt{\frac{49\cdot 2}{100}} = \sqrt{1 - \frac{1}{50}}$, постольку биномиальный ряд для $x = -\frac{1}{50}$ и $y = \frac{1}{2}$ дает такое выражение для корня из двух

$$\sqrt{2} = \frac{10}{7}\left(1 - \frac{1}{100} - \frac{1}{100^2 2!} - \frac{3}{100^3 3!} - \frac{3\cdot 5}{100^4 4!} - \frac{3\cdot 5\cdot 7}{100^5 5!} - \dots\right) \tag{5.11}$$

Из приведенных выше членов разложения $\sqrt{2}$ вычисляется с точностью до десятого знака после запятой.

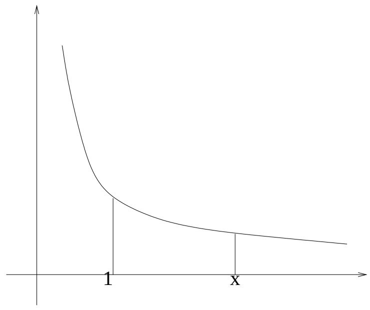
Общий метод вычисления корня $\sqrt[n]{x}$ заключается в нахождении рациональной дроби $\frac{p}{q}$ достаточно хорошо приближающей этот корень. Тогда число $\frac{q}{p}\sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{q^n x/p^n}$ близко к единице и извлечение корня из $\sqrt[n]{q^n x/p^n}$ может быть успешно произведено с помощью биномиального ряда. Результат этого вычисления после этого следует умножить на $\frac{p}{q}$.

Задачи.

1. Доказать неравенство Бернулли $(1+x)^n \geq 1+nx$
2. Доказать неравенство $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leq \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$
3. Суммировать $\sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k$
4. Вычислить $\sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k 2^{n-k}$
5. Суммировать $\sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k$
6. Доказать тождество $\left(\sum\limits_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}\right)^2 + \left(\sum\limits_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}\right)^2 = 1$
7. Доказать неравенство $(n+1)^n < n^{n+1}$
8. Доказать неравенство $(\sqrt[n]{n}-1)^2 < \frac{2}{n-1}$ с помощью тождество $n = (1+(\sqrt[n]{n}-1))^n$
9. Суммировать $\sum\limits_{k=1}^{n} kC_n^k$
10. Суммировать $\sum\limits_{k=0}^{n} (C_n^k)^2$
11. Суммировать $\sum\limits_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1} C_n^k$
12. Суммировать $\sum\limits_{k=0}^{2n} (-1)^k (C_{2n}^k)^2$
13. Написать биномиальный ряд, выражающий $\sqrt{-1}$ и убедится, что квадрат этого ряда по Коши дает в сумме единицу
14. * Число Каталана c_n определяется как число правильных способов расстановки скобок в сумме $a_1 + a_2 + \cdots + a_n$. Доказать, что числа Каталана удовлетворяют следующему рекуррентному соотношению $c_n = \sum\limits_{k=0}^{n} c_k c_{n-k}$ и вывести формулу для чисел Каталана

6 Гиперболический логарифм

Гиперболические логарифмы. Фигура ограниченная сверху графиком гиперболы $y = 1/x$, снизу — отрезком $[a, b]$ оси абсцисс, а слева и справа вертикальными отрезками, проходящими через концы этого отрезка, называется *гиперболической трапецией* над отрезком $[a, b]$ или с основанием $[a, b]$.



Геометрическая прогрессия точек деления дает арифметическую прогрессию площадей гиперболических трапеций. Это открытие было сделано английским математиком Грегори в 1647 году.

Гиперболическим логарифмом числа $x \geq 1$ называется площадь гиперболической трапеции с основанием $[1, x]$. Гиперболический логарифм числа x обозначается $\ln x$.

Гиперболический поворот. Доказательства основных свойств гиперболического логарифма основаны на использовании гиперболического поворота. А именно, *гиперболическим поворотом* с коэффициентом k называется преобразование плоскости, задаваемое в декартовых координатах формулой $(x, y) \to (kx, y/k)$.

Лемма 6.1. *Гиперболический поворот переводит любую гиперболическую трапецию в гиперболическую трапецию той же площади.*

Гиперболический поворот, очевидно, не меняет площади никакого прямоугольника со сторонами параллельными осям координат. Вообще, гиперболический поворот не меняет площади никакой фигуры, поскольку ее можно аппроксимировать фигурами, составленными из прямоугольников, параллельных осям координат. Строгое доказательство этой леммы приведено ниже, а сейчас мы ей воспользуемся для доказательства основного свойства логарифмов.

Лемма 6.2. *Гиперболический логарифм при любых x и y удовлетворяет соотношению*

$$\ln xy = \ln x + \ln y. \tag{6.1}$$

Доказательство. Пусть $x, y > 1$. Так как гиперболический поворот с коэффициентом y переводит гиперболическую трапецию над $[1, x]$ в гиперболическую трапецию над $[y, xy]$. Поскольку площадь первой равна $\ln x$, а второй — $\ln xy - \ln y$, постольку получаем $\ln xy = \ln x + \ln y$. $\square$

Логарифмы чисел меньших единицы Теперь мы определим логарифмы чисел меньших единицы таким образом, чтобы основное свойство логарифмов 6.3 выполнялось для всех положительных чисел.

Во-первых, заметим, что

Лемма 6.3. *Существует единственная функция, определенная множестве положительных чисел, совпадающая с гиперболическим логарифмом для чисел больших единицы и переводящая произведение в сумму.*

Доказательство. Пусть $l(x)$ произвольная функция, переводящая произведение в сумму. Поскольку $1^2 = 1$, постольку $2l(1) = l(1)$ и $l(1) = 0$. А так как $x\frac{1}{x} = 1$, то при любом $x > 0$ для $l(x)$ справедлива следующая *формула обращения*:

$$l(x) = -l(1/x) \tag{6.2}$$

Таким образом, единственное возможное продолжение гиперболического логарифма на числа меньшие единице с сохранением основного свойства логарифмов задается формулой обращения. Тем самым лемма доказана в части единственности. Для доказательства существования нужно убедиться, что совпадающая с $\ln x$ при $x > 1$ и определенная при $x < 1$ формулой обращения функция $l(x)$ удовлетворяет основному свойству логарифмов.

Пусть $x, y > 1$ докажем, что тогда $l(x/y) = l(x) - l(y)$. Действительно, если $x > y$, то наше равенство превращается в верное $\ln(x/y) = \ln(x) - \ln(y)$. Если же $x < y$, то $l(x/y) = -\ln(y/x)$ и равенство превращается в другое верное $-\ln(y/x) = \ln x - \ln y$.

Так как произвольное положительное число можно представить в виде отношения двух чисел больших единицы $x = u/v$, $y = t/s$, то с одной стороны имеем $l(x) = \ln u - \ln v$ и $l(y) = \ln t - \ln s$. А с другой имеем $l(xy) = \ln ut - \ln vs$, откуда видно равенство $l(xy) = l(x) + l(y)$ для любых x, y. □

Во-вторых, заметим,что при $x > 1$, гиперболический поворот с коэффициентом x переводит гиперболическую трапецию с основанием $[1/x, 1]$ в гиперболическую трапецию с основанием $[1, x]$. Поэтому гиперболические логарифмы для чисел меньших единицы определяются как взятая со знаком минус площадь гиперболической трапеции с основанием $[x, 1]$.

Результатом наших рассмотрений является следующая.

Теорема 1 (о гиперболических логарифмах). *Гиперболический логарифм является строго монотонно возрастающей функцией, определенной для всех $x \geq 0$ и при любых x и y удовлетворяет соотношению*

$$\ln xy = \ln x + \ln y. \tag{6.3}$$

Площадь криволинейной трапеции. Сейчас мы более подробно проанализируем понятие площади гиперболической и более общей криволинейной трапеции так чтобы строго доказать использованное выше утверждение о том, что гиперболический поворот сохраняет площади гиперболических трапеций.

Пусть $f(x)$ — неотрицательная функция, определенная на отрезке $[a,b]$. Тогда фигура $T_f^{a,b} = \{(x,y) \mid a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f(x)\}$ называется (порожденной $f(x)$) *криволинейной трапецией*, отрезок $[a,b]$ называется *основанием* этой трапеции.

Максимальный прямоугольник, одной стороной которого служит отрезок $[a,b]$, содержащийся в $T_f^{a,b}$ называется *вписанным* прямоугольником. И минимальный прямоугольник, одной стороной которого служит отрезок $[a,b]$, содержащий $T_f^{a,b}$ называется *описанным* прямоугольником. Высота вписанного прямоугольника равна минимальному, а высота описанного — максимальному значению функции на отрезке $[a,b]$.

Возрастающая последовательность $x_0, x_1, x_2 \dots x_n$ точек отрезка $[a,b]$, начинающаяся с $x_0 = a$ и кончающаяся $x_n = b$, называется *разбиением* отрезка $[a,b]$.

Объединение вписанных в $T_f^{x_{i-1},x_i}$ прямоугольников соответствующих данному разбиению отрезка называется *вписанным мультипрямоугольником*, соответствующим разбиению $\{x_i\}_{i=0}^n$. Аналогично определяется *описанный мультипрямоугольник* криволинейной трапеции для данного разбиения.

Лемма 6.4 (об исчерпывании). *Для монотонной положительной на $[a,b]$ функции $f(x)$ площадь криволинейной трапеции $T_f^{a,b}$ является наименьшим числом, превосходящим площадь любого вписанного в нее мультипрямоугольника.*

Доказательство. Во-первых, очевидно, что площадь любого вписанного мультипрямоугольника не превосходит площади трапеции, ибо "часть меньше целого". Рассмотрим теперь произвольное число S, меньшее площади трапеции $T_f^{a,b}$, обозначаемой через T. Выберем натуральное число n так чтобы

$$n > |f(b) - f(a)|(b-a)/(T-S). \tag{6.4}$$

Разобьем отрезок $[a,b]$ на n равных отрезков $[x_{i-1}, x_i]$. Разность между площадью вписанного и площадью описанного прямоугольника для i-го отрезка разбиения равна произведению $|f(x_i) - f(x_{i-1}|$ (ибо монотонная функция достигает максимума и минимума на концах отрезка) на $\frac{b-a}{n}$ — длину отрезка. Поэтому разность между площадями P_n вписанного и P'_n описанного мультипрямоугольников для этого разбиения будет равна

$$P'_n - P_n = \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} |f(x_i) - f(x_{i-1}| \tag{6.5}$$

Поскольку функция $f(x)$ монотонна на $[a,b]$, постольку $\sum\limits_{k=1}^{n} |f(x_i) - f(x_{i-1}| = |f(b) - f(a)|$. А так как $P'_n \geq T \geq P_n$, то

$$T - P_n \leq \frac{b-a}{n} |f(b) - f(a)| \leq \frac{b-a}{(b-a)|f(b)-f(a)|/(T-S)} |f(b) - f(a)| = T - S$$

Откуда $P_n > S$. Таким образом установлено, что площади вписанных мультипрямоугольников исчерпывают площадь трапеции. □

Доказательство леммы о гиперболическом повороте. Пусть гиперболическая трапеция площади S перешла в результате применения гиперболического поворота в трапецию площади S'. Предположим $S > S'$. Тогда, в силу леммы 6.4 найдется вписанный в первую трапецию мультипрямоугольник площади S_1 большей, чем S'. Но тогда гиперболический поворот переведет его в мультипрямоугольник той же площади вписанный во вторую трапецию. Получаем, что вписанный мультипрямоугольник имеет площадь большую, чем содержащая его трапеция. Полученное противоречие завершает доказательство. □

Базовые оценки логарифма. Из определения логарифма как площади под гиперболой вытекают такие оценки:

$$\frac{x}{1+x} \leq \log(1+x) \leq x \qquad (0 < x < 1) \tag{6.6}$$

Действительно, при $x > 0$ гиперболическая трапеция с основанием $[1, 1+x]$ содержится в (описанном) прямоугольнике шириной x и высотой 1 и содержит (вписанный) прямоугольник шириной x и высотой $\frac{1}{1+x}$ равной минимальному значению гиперболы в этом интервале и принимаемому в его правом конце. А базовые оценки логарифма представляют собой не что иное как площади вписанного (нижняя) и описанного (верхняя) прямоугольников.

При $x < 0$ площадь описанного прямоугольника задается той же формулой, что площадь вписанного для $x < 0$ но со знаком минус, потому что ширина прямоугольников теперь выражается как $-x$. Сам логарифм в этом случае выражается взятой со знаком минус площадью гиперболической трапеции. В результате двойного изменения на противоположные неравенства остаются в силе.

Логарифмы по другим основаниям Если в определении логарифмов вместо гиперболы $xy = 1$ использовать гиперболу $xy = k$ с $k \neq 1$, то получиться функция тоже удовлетворяющая основному свойству логарифмов, отличающаяся от натурального логарифма постоянным множителем. Все такие функции тоже называются логарифмами и различаются своими основаниями. *Основанием* логарифма называется число логарифм которого равен единице. Логарифм числа x с основанием a обозначается $\log_a x$. Так как он отличается от натурального логарифма постоянным множителем, то величину этого множителя можно определить из условия $\log_a a = 1$. Откуда

$$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a} \tag{6.7}$$

Последнее равенство следует рассматривать как определение логарифма по основанию a. Основанием логарифма может служить любое отличное от единицы положительное число.

Наряду с натуральными логарифмами часто применяются десятичные и двоичные (в информатике) логарифмы. Десятичный логарифм имеет специальное обозначение lg. Десятичный логарифм позволяет определить количество десятичных знаков используемых для записи целого числа.

Основание натуральных логарифмов. Основание гиперболических логарифмов является числом, играющим фундаментальную роль в математике. Оно обозначается буквой e и определяется как такое число, для которого площадь гиперболической трапеции с основанием $[1, e]$ единична. Рассмотрим геометрическую прогрессию q^n для $q = 1 + \frac{1}{n}$. Все слагаемые соответствующей последовательности описанных прямоугольников равны $\frac{q^{k+1}-q^k}{q^k} = q - 1 = \frac{1}{n}$. Следовательно интервал $[1, q^n]$ равен 1 и больше чем $\log q^n$. Следовательно $e > q^n$. Слагаемые площадей вписанных прямоугольников в этом случае равны $\frac{q^{k+1}-q^k}{q^{k+1}} = 1 - \frac{1}{q} = \frac{1}{n+1}$. Следовательно их сумма над интервалом $[1, q^{n+1}]$ равна 1. Она меньше чем соответствующий логарифм. Следовательно $e < q^{n+1}$. Так мы доказали следующие оценки для e:

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < e < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} \tag{6.8}$$

Мы убедились, что $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ быстро стремится к e когда n стремится к бесконечности.

Число e дает принципиально новую формулу для арифметики бесконечного $\left(1 + \frac{1}{\infty}\right)^\infty = e$. При этом, эту формулу нельзя вычислять по частям. А именно, если заменить $\frac{1}{\infty}$ нулем, то мы получим неопределенность вида 1^∞.

Задачи.

1. Получить уравнение касательной к гиперболе в произвольной точке.
2. Доказать неравенства $\frac{7}{12} < \ln 2 < \frac{5}{6}$
3. Доказать неравенства $\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} < \ln n < \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$
4. Доказать неравенство $\ln 3 > 1$
5. Доказать неравенства $\frac{2}{3} < \ln 2 < \frac{3}{4}$
6. Определить целую часть числа $\ln 1000$
7. Доказать неравенство $\log(1 + x) > x - \frac{x^2}{2}$
8. Найти число, логарифм которого больше миллиона
9. Найти целую часть логарифма $\ln 25$.
10. Найти целую часть логарифма $\ln 15$.
11. * Доказать, что
$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{5 \cdot 6} + \cdots = \ln 2$$

7 Экспонента и функциональные уравнения.

Рассуждение Эйлера. Так как $e = \left(1+\frac{1}{\omega}\right)^{\omega}$ для бесконечно большого ω, то

$$e^x = \left(1+\frac{1}{\omega}\right)^{x\omega} = \left(1+\frac{x}{x\omega}\right)^{x\omega} = \left(1+\frac{x}{\omega}\right)^{\omega}.$$

Рассмотрим биномиальное разложение

(7.1)
$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = 1+x+\frac{n(n-1)x^2}{2!n^2}+\frac{n(n-1)(n-2)x^3}{3!n^3}+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)x^4}{4!n^4}+\dots$$

Поскольку при бесконечно большом $n = \omega$ (k фиксировано) отношение $\frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{n^k}$ превращается в единицу, постольку правая часть приведенной выше формулы трансформируется в *экспоненциальный ряд*

(7.2)
$$1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\dots$$

Так как всякая показательная функция a^x имеет вид e^{kx} для $k = \ln a$, то подстановка в ряд (7.2) $x \ln a$ вместо x дает разложение в степенной ряд любой показательной функции.

В частности, для основания натуральных логарифмов также получается представление в виде ряда:

(7.3)
$$e = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}.$$

Экспонента. Цель сегодняшней лекции — строгое доказательство этих результатов Эйлера. Для того чтобы это сделать мы начнем с другого конца: определим посредством ряда (7.2) функцию *экспонента* $\exp x$, докажем, что она имеет вид e^x для $e = \exp 1$ определяемого рядом (7.3). А потом докажем, что число $\exp 1$ является основанием натуральных логарифмов и в итоге докажем, что экспонента является функцией, обратной натуральному логарифму.

Итак, рассмотрим функцию $\exp x$ (экспонента) представленную степенным (экспоненциальным) рядом:

(7.4)
$$\exp x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}.$$

Экспоненциальный ряд абсолютно сходится при любом x в силу признака Даламбера и определяет функцию, которая очевидным образом монотонно возрастет при $x > 0$ и положительна. То что она положительна и монотонно возрастает для отрицательных x несколько менее очевидно. Но это легко вытекает из следующей теоремы, выражающей основное свойство экспоненты.

Теорема 1 (сложения). *Для любых вещественных x, y справедливо равенство* $\exp(x+y) = \exp x \exp y$

Доказательство. Произведение экспоненциальных рядов $\exp x \exp y$ в форме Коши представляется рядом $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k$, где $c_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{x^k y^{n-k}}{k!(n-k)!}$. А так как n-ый член экспоненциального ряда, представляющего $\exp(x+y)$ равен $\frac{(x+y)^n}{n!}$, то справедливость равенств $c_n = \frac{(x+y)^n}{n!}$ при любом n влечет утверждение теоремы. Справедливость же последних является непосредственным следствием формулы бинома Ньютона. □

Функциональные уравнения. У нас возникло два различных подхода к показательной функции — биномиальный и экспоненциальный ряды. Почему эти подходы дают один и тот же результат вытекает из следующей характеризационной теоремы о показательной функции.

Теорема 2 (о показательной функции). *Для любого положительного числа a существует единственная монотонная функция, принимающее в единице значение a и переводящая сумму в произведение.*

В качестве, одного из применений этой теоремы докажем следующее правило повторной степени:

$$(a^b)^c = a^{bc} \tag{7.5}$$

Посмотрим на левую и правую части этого равенства, как на функции от переменной c, фиксировав a и b. Обе эти функции монотонны, переводят сумму в произведение и совпадают при $c = 1$. Поэтому они совпадают при любом c в силу теоремы **2**.

Теорема о показательной функции получена ниже из характеризационной теоремы для линейной функции, к доказательству которой мы приступаем.

Лемма 7.1. *Если $f(x)$ ограничена сверху на отрезке $[a, b]$, не положительна на его концах и при всех x, y удовлетворяет неравенству*

$$2f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq f(x) + f(y), \tag{7.6}$$

то $f(x) \leq 0$ при любом $x \in [a, b]$

Доказательство. Предположим $f(t) > 0$ для некоторого $t \in (0, 1)$. Если $t - a < b - t$, то $t' = a + 2(t - a) < b$ и $t = \frac{a+t'}{2}$. Из условия (7.6) получаем $2f(t) \leq f(a) + f(t')$, а так как $f(a) \leq 0$, отсюда получаем, что $f(t') > 2f(t)$. Если же $t - a > b - t$, то $t' = b - 2(b - t) > a$ и $t = \frac{a+t'}{2}$. И по аналогичным соображениям получаем, что $f(t') > 2f(t)$. Теперь мы можем в предыдущем рассуждении подставить t' вместо t и t'' вместо t' и получить $f(t'') > 2f(t')$ и так далее. Что приводит к противоречию с предположением об ограниченности $f(t)$ на отрезке $[a, b]$. □

Теорема 3. *Ограниченная функция $f(x)$ линейна на промежутке (a, b) если и только если при любых $x, y \in (a, b)$ выполнено равенство*

$$2f\left(\frac{x+y}{2}\right) = f(x) + f(y) \tag{7.7}$$

Доказательство. Во-первых, заметим, что условие (7.7) *аддитивно*: сумма функций, удовлетворяющих условию также удовлетворяет этому условию. Во-вторых, заметим, что условие (7.7) *однородно*, то есть выдерживает умножение на константу. Поэтому, то что линейная функция $y = ax + b$ удовлетворяет (7.7) следует уже из того, что любая постоянная функция и функция $y = x$ удовлетворяют (7.7). Это доказывает теорему в части необходимости.

Для доказательства достаточности зафиксируем какую-то пару точек $a' < b'$ из рассматриваемого промежутка. Обозначим через $l(x)$ линейную функцию, такую что $l(a') = f(a')$ и $l(b') = f(b')$. В таком случае разности $f(x) - l(x)$ и $l(x) - f(x)$, в силу отмеченных выше свойств аддитивности и однородности условия (7.7), обе удовлетворяют (7.7) и принимают на концах отрезка нулевые значения. В силу леммы 7.1 получаем, что при $x \in (a', b')$ одновременно выполнены неравенства

$$l(x) - f(x) \leq 0 \qquad f(x) - l(x) \leq 0,$$

из которых вытекает совпадение $f(x)$ с $l(x)$ на $[a', b']$.

Если $a'' < a'$, то аналогичные рассуждения показывают, что $f(x)$ на отрезке $[a'', b']$ совпадает с линейной функцией $l'(x)$, определенной соотношениями $l'(a'') = f(a'')$ и $l'(b) = f(b)$. А так как $a' \in [a'', b']$, то $l'(a') = f(a')$. В результате получаем, что линейные функции $l(x)$ и $l'(x)$ совпадают на концах $[a', b']$. Но тогда они тождественно совпадают. В частности $f(a'') = l(a'')$. То есть совпадение $f(x)$ и $l(x)$ доказано на промежутке $(a, b]$. Аналогично доказывается их совпадение и для $b'' > b'$. Таким образом линейность $f(x)$ установлена на всем промежутке (a, b). □

Из доказанной теоремы немедленно вытекает такое следствие.

Следствие 4. *Если монотонная функция $f(x)$ определена на положительной полуоси или для всех действительных чисел и при любых x, y из области определения удовлетворяет равенству $f(x + y) = f(x) + f(y)$, то $f(x) = xf(1)$ при любом x.*

Доказательство. Монотонность функции $f(x)$ влечет ее ограниченность на любом отрезке. А так как она переводит сумму в сумму, то переводит среднее арифметическое в среднее арифметическое. Поэтому из теоремы **3** вытекает, что она линейна на любом отрезке. Так как $f(0) = f(0) + f(0)$, то $f(0) = 0$ и на любом, содержащем ноль и единицу, отрезке имеем $f(x) = kx$, где $k = (1)$. Для отрицательных x имеем $f(x) + f(-x) = f(0) = 0$ откуда $f(x) = -f(-x) = -kx = k(-x)$. □

Обратность экспоненты и гиперболического логарифма.

Теорема 5. *Для любого числа x выполнено равенство* $\log \exp x = x$

Доказательство. Функция $\ln \exp x$ монотонно возрастает и аддитивна, поэтому совпадает с ax, в силу теоремы о линейной функции. Сравнение экспоненциального ряда с геометрическим дает для $x > 0$ неравенство

$$\exp x \leq \frac{1}{1 - x} \tag{7.8}$$

Поэтому

$$ax = \ln \exp x \leq \ln \frac{1}{1-x} = \ln\left(1 + \frac{x}{1-x}\right) \leq \frac{x}{1-x} \tag{7.9}$$

Следовательно, $(a-1)x - ax^2 \leq 0$ при $x \geq 0$. Откуда $a \leq 1$.

С другой стороны, при $x > 0$ очевидно неравенство $\exp x \geq 1 + x$, что в сочетании с неравенством $\ln(1+x) \geq \frac{x}{1+x}$ дает неравенство

$$ax = \ln \exp x \geq \ln(1+x) \geq \frac{x}{1+x} \tag{7.10}$$

Следовательно, $ax^2 + (a-1)x \geq 0$ при $x \geq 0$ откуда $a \geq 1$. Поэтому заключаем $a = 1$. □

Логарифмирование степени. Докажем следующее правило логарифмирования степени

$$\ln a^b = b \ln a \tag{7.11}$$

Так как показательная функция a^x переводит сумму в произведение и монотонна, то $\ln a^x$ является линейной функцией вида $x \ln a$. Потенцирование этого равенства приводит к формуле

$$a^b = \exp(b \ln a), \tag{7.12}$$

которая позволяет вычислять произвольные степени с помощью экспоненты и логарифма и которую можно рассматривать как определение операции возведения в степень.

Приведенное выше рассуждение опиралось только на монотонность и на основное свойство показательной функции, а в результате получено ее выражение через экспоненту и логарифм. Поэтому это рассуждение доказывает теорему **2**.

Задачи.

1. Суммировать $\sum\limits_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}$

2. Суммировать $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{2^k}{(2k)!}$

3. Суммировать $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{2^k}{(2k+1)!}$

4. Докажите, что монотонная мультипликативная (переводящая произведение в произведение) функция определенная на положительной полуоси степенная ($y = x^a$).

5. Если при любых $x, y \in [a, b]$ выполнено равенство $2f\left(\frac{x+y}{2}\right) = f(x) + f(y)$ и функция $f(x)$ ограничена на некотором отрезке $[c, d] \subset [a, b]$, то $f(x)$ ограничена и на всем отрезке $[a, b]$

6. Если при любых $x, y \in [a, b]$ выполнено равенство $2f\left(\frac{x+y}{2}\right) = f(x) + f(y)$ и функция $f(x)$ ограничена сверху на некотором отрезке $[a, b]$, то $f(x)$ ограничена на отрезке $[a, b]$ также снизу.

7. Доказать неравенство Жордана $\sin x \geq \frac{2}{\pi}x$ при $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$

8 Комплексные числа

Кубическое уравнение Подстановка $x = y - \frac{a}{3}$ сводит общее кубическое уравнение $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ к

$$y^3 + py + q = 0.$$

Редуцированное уравнение решается с помощью следующего трюка. Корень ищется в форме $y = \alpha + \beta$. Тогда $(\alpha + \beta)^3 + p(\alpha + \beta) + q = 0$ или $\alpha^3 + \beta^3 + 3\alpha\beta(\alpha + \beta) + p(\alpha + \beta) + q = 0$. Последнее равенство сводится к системе

$$\begin{aligned} \alpha^3 + \beta^3 &= -q, \\ 3\alpha\beta &= -p. \end{aligned} \tag{8.1}$$

Возведение второго уравнения в куб дает

$$\begin{aligned} \alpha^3 + \beta^3 &= -q, \\ 27\alpha^3\beta^3 &= -p^3. \end{aligned}$$

Теперь α^3, β^3 являются корнями квадратного уравнения

$$x^2 + qx - \tfrac{p^3}{27},$$

называемого *резольвентой* исходного кубического уравнения. Иногда резольвента не имеет решений, хотя кубическое уравнение всегда имеет корень. Несмотря на это можно вычислить корень кубического уравнения с помощью его резольвенты. Чтобы это сделать надо просто игнорировать тот факт, что под корнем могут оказаться отрицательные числа.

Например рассмотрим следующее кубическое уравнение

$$x^3 - \tfrac{3}{2}x - \tfrac{1}{2} = 0. \tag{8.2}$$

Тогда (8.1) превращается в

$$\begin{aligned} \alpha^3 + \beta^3 &= \tfrac{1}{2}, \\ \alpha^3\beta^3 &= \tfrac{1}{8}, \end{aligned}$$

Соответствующая резольвента будет $t^2 - \frac{t}{2} + \frac{1}{8} = 0$ и ее корни таковы:

$$t_{1,2} = \tfrac{1}{4} \pm \sqrt{\tfrac{1}{16} - \tfrac{1}{8}} = \tfrac{1}{4} \pm \tfrac{1}{4}\sqrt{-1}.$$

Тогда искомый корень кубического уравнения задается формулой

$$\sqrt[3]{\tfrac{1}{4}(1 + \sqrt{-1})} + \sqrt[3]{\tfrac{1}{4}(1 - \sqrt{-1})} = \tfrac{1}{\sqrt[3]{4}} \left(\sqrt[3]{1 + \sqrt{-1}} + \sqrt[3]{1 - \sqrt{-1}} \right). \tag{8.3}$$

Оказывается, что последнее выражение естественным образом интерпретируется как вещественное число (8.2). Чтобы его определить, рассмотрим следующее выражение:

$$\sqrt[3]{(1 + \sqrt{-1})^2} - \sqrt[3]{(1 + \sqrt{-1})}\sqrt[3]{(1 - \sqrt{-1})} + \sqrt[3]{(1 - \sqrt{-1})^2}. \tag{8.4}$$

Так как

$$(1+\sqrt{-1})^2 = 1^2 + 2\sqrt{-1} + \sqrt{-1}^2 = 1 + 2\sqrt{-1} - 1 = 2\sqrt{-1},$$

левое слагаемое в (8.4) равняется

$$\sqrt[3]{2\sqrt{-1}} = \sqrt[3]{2}\sqrt[3]{\sqrt{-1}} = \sqrt[3]{2}\sqrt{\sqrt[3]{-1}} = \sqrt[3]{2}\,\sqrt{-1}.$$

Аналогично $(1-\sqrt{-1})^2 = -2\sqrt{-1}$, и правое слагаемое в (8.4) превращается в $-\sqrt[3]{2}\,\sqrt{-1}$. Наконец $(1+\sqrt{-1})(1-\sqrt{-1}) = 1^2 - \sqrt{-1}^2 = 2$ и центральное слагаемое есть $-\sqrt[3]{2}$. В результате все выражение (8.4) оказывается равным $-\sqrt[3]{2}$.

С другой стороны вычисление произведения (8.3) и (8.4) по обычной формуле как суммы кубов дает

$$\tfrac{1}{\sqrt[3]{4}}((1+\sqrt{-1})+(1-\sqrt{-1})) = \tfrac{1}{\sqrt[3]{4}}((1+1)+(\sqrt{-1})-\sqrt{-1})) = \tfrac{1}{\sqrt[3]{4}}(2+0) = \sqrt[3]{2}.$$

Следовательно (8.3) равно $\frac{\sqrt[3]{2}}{-\sqrt[3]{2}} = -1$. И -1 действительно, является корнем уравнения (8.2).

Арифметика комплексных чисел

В дальнейшем мы используем i вместо $\sqrt{-1}$. Есть два основных способа записи комплексных чисел. Запись вида $z = a + ib$, где a и b являются вещественными числами мы называем *аддитивной формой* числа z. Числа a и b называются соответствено *действительной* и *мнимой* частями z и обозначаются $\operatorname{Re} z$ и $\operatorname{Im} z$ соответственно. Сумма и произведение комплексных чисел в аддитивной форме выражаются следующим образом:

$$\begin{aligned}
\operatorname{Re}(z_1+z_2) &= \operatorname{Re} z_1 + \operatorname{Re} z_2,\\
\operatorname{Im}(z_1+z_2) &= \operatorname{Im} z_1 + \operatorname{Im} z_2,\\
\operatorname{Re}(z_1z_2) &= \operatorname{Re} z_1 \operatorname{Re} z_2 - \operatorname{Im} z_1 \operatorname{Im} z_2,\\
\operatorname{Im}(z_1z_2) &= \operatorname{Re} z_1 \operatorname{Im} z_2 + \operatorname{Im} z_1 \operatorname{Re} z_2.
\end{aligned}$$

Мультипликативной формой комплексного числа называется представление $z = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, где $\rho \geq 0$ и φ — вещественные числа, из которых первое называется *модулем* или *абсолютной величиной* комплексного числа z и обозначается $|z|$, а φ называется *аргументом.* Аргумент комплексного числа определен неоднозначно. Однозначно определен лишь его остаток от целочисленного деления на 2π. Через $\operatorname{Arg}(z)$ обозначается множество всех аргументов z, и через $\arg z$ обозначается элемент множества $\operatorname{Arg} z$, удовлетворяющий неравенствам $-\pi < \arg z \leq \pi$. Таким образом $\arg z$ однозначно определен для всех комплексных чисел и называется *главным аргументом* числа z.

Число $a - bi$ называется *сопряженным* к $z = a + bi$ и обозначается $\overline{z}$. Имеет место тождество $z\overline{z} = |z|^2$. Это позволяет выразить z^{-1} как $\frac{\overline{z}}{|z|^2}$.

Если $z = a + ib$, то $|z| = \sqrt{a^2+b^2}$ и $\arg z = \operatorname{arctg}\frac{b}{a}$. Комплексные числа можно представлять точками плоскости. Число $z = a + bi$ представляется точкой Z с координатами (a, b). Тогда $|z|$ равно расстоянию от Z до начала

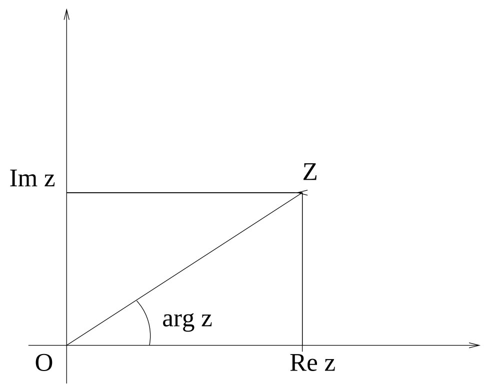


Рис. 1: The representation of a complex number

координат O. И $\arg z$ представляет угол между осью абсцисс и лучом $\overrightarrow{OZ}$. Сложению комплексных чисел соответствует обычное сложение векторов. И обычное неравенство треугольника превращается в *модульное неравенство*:

$$|z + \zeta| \leq |z| + |\zeta|.$$

Формула умножения для комплексных чисел в мультипликативной форме особенно проста:

$$r(\cos\varphi + i\sin\varphi)r'(\cos\psi + i\sin\psi) = rr'(\cos(\varphi+\psi) + i\sin(\varphi+\psi)). \tag{8.5}$$

Действительно, левая и правая части (8.5) преобразуются к

$$rr'(\cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\sin\psi) + irr'(\sin\varphi\cos\psi + \sin\psi\cos\varphi).$$

То есть, модуль произведения равен произведению модулей и аргумент произведения равен сумме аргументов:

$$\operatorname{Arg} z_1 z_2 = \operatorname{Arg} z_1 \oplus \operatorname{Arg} z_2.$$

Для главного значения аргумента равенство

$$\arg z_1 z_2 = \arg z_1 + \arg z_2 \tag{8.6}$$

выполнено, если $|\arg z_1| < \frac{\pi}{2}$ и $|\arg z_2| < \frac{\pi}{2}$, а в других случаях левая и правая часть равенства могут отличаться на 2π.

Формула умножения позволяет по индукции доказать следующее:

(Формула Муавра) $$\boxed{(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = (\cos n\varphi + i\sin n\varphi).}$$

На самом деле Муавр получил две формулы: для косинуса и синуса n-кратного угла. Эти формулы Муавра представляют собой соответственно вещественную и комплексную части приведенной выше комплексной формулы. Для получения оригинальных формул Муавра нужно воспользоваться комплексной версией бинома Ньютона, доказательство которой аналогично вещественному случаю.

Комплексная геометрическая прогрессия

Сумма геометрической прогрессии с комплексным знаменателем дается обычной формулой

$$\sum_{k=0}^{n} z^k = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z}. \tag{8.7}$$

И доказательство этого факта такое же как в случае вещественных чисел. Но значение этой формулы другое. Любая комплексная формула фактически представляет собой пару формул. Любое комплексное уравнение фактически представляет пару уравнений.

В частности, для $z = q(\sin\varphi + i\cos\varphi)$ вещественная часть левой стороны в (9.9) благодаря формуле Муавра превращается в $\sum\limits_{k=0}^{n} q^k \sin k\varphi$ и правая часть превращается в $\sum\limits_{k=0}^{n} q^k \cos k\varphi$.

Таким образом формула геометрической прогрессии распадается в пару формул, позволяющих суммировать тригонометрические ряды.

Корни из единицы Особый интерес представляет геометрическая прогрессия со знаменателем $\varepsilon_n = \cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}$. В этом случае она циклически принимает одни и те же значения, потому что $\varepsilon_n^n = 1$. Члены этой последовательности называются *корнями из единицы*, потому что удовлетворяют уравнению $z^n - 1 = 0$.

Лемма 8.1.

$$(z^n - 1) = \prod_{k=1}^{n} (z - \varepsilon_n^k) \tag{8.8}$$

Доказательство. Произведение в правой части 8.8 обозначим $P(z)$. Этот многочлен имеет степень n, старший коэффициент 1 и имеет все ε_n^k своими корнями. Тогда разность $(z^n - 1) - P(z)$ является многочленом степени $< n$, который имеет n различных корней. Такой многочлен тождественно равен нулю в силу следующей общей теоремы. □

Теорема 1. *Число корней ненулевого комплексного многочлена не превышает его степени.*

Доказательство. Доказательство проводим индукцией по степени $P(z)$. Многочлены степени один имеют вид $az + b$ и единственный корень $-\frac{b}{a}$. Предположим что наша теорема доказана для любого многочлена степени $< n$. Рассмотрим многочлен $P(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n$ степени n с комплексными коэффициентами. Предположим он имеет по меньшей мере n корней $z_1 \dots z_n$. Рассмотрим многочлен $P^*(z) = a_n \prod_{k=1}^{n}(z - z_k)$. Разность $P(z) - P^*(z)$ имеет степень $< n$ и имеет по меньшей мере n корней (все z_k). По предположению индукции разность равна нулю. Следовательно, $P(z) = P^*(z)$. Но $P^*(z)$ имеет только n корней. Действительно, для любого z отличного от всех z_k one has $|z - z_k| > 0$. Следовательно, $|P^*(z)| = |a_n| \prod_{k=1}^{n} |z - z_k| > 0$. □

Блокируя сопряженные корни, получаем чисто вещественную формулу.

$$z^n - 1 = (z-1)\prod_{k=1}^{(n-1)/2}\left(z^2 - 2z\cos\frac{2k\pi}{n} + 1\right) \tag{8.9}$$

Заменяя в полученном выражении z дробью $\frac{z}{a}$, можно получить такое равенство

$$z^n - a^n = (z-a)\prod_{k=1}^{(n-1)/2}\left(z^2 - 2za\cos\frac{2k\pi}{n} + a^2\right) \tag{8.10}$$

Задачи.

1. Вычислить $(1+i)^{100}$, $\left(\sqrt{3}+i\right)^{100}$
2. Разложить в степенной ряд дробь $\frac{1}{x^2-2x+2}$
3. * Решить кубическое уравнение $8x^3 - 6x - 1 = 0$
4. Суммировать $\sum\limits_{k=0}^{n}(-1)^k C_{2n}^{2k}$
5. Доказать тождество $(x+\sqrt{1-x^2})^n + (x-\sqrt{1-x^2})^n = 2\cos(n\arccos x$
6. Вычислить $\prod_{k=1}^{n}\cos\frac{k\pi}{n}$

9 Формула Эйлера

Именем Эйлера называется не один десяток математических формул, но самой замечательной и самой важной является следующая

$$\boxed{e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi} \tag{9.1}$$

Вывод Эйлера. Формула Муавра позволяет при любом натуральном n написать равенство

$$\cos\varphi + i\sin\varphi = \left(\cos\frac{\varphi}{n} + i\sin\frac{\varphi}{n}\right)^n$$

Раскрывая степень справа по биному Ньютона, получаем выражение

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!} \cos^{n-k}\frac{\varphi}{n} i^k \sin^k\frac{\varphi}{n} \tag{9.2}$$

Далее Эйлер подставляет в это выражение $n = \infty$ и пользуется тем, что бесконечно малая дуга равна своему синусу и имеет косинусом единицу. В результате выражение (9.2) при бесконечно большом n имеет то же значение, как и следующее

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!} \frac{\varphi^k i^k}{n^k} \tag{9.3}$$

А так как при бесконечно большом n будет $\frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{n^k} = 1$, то последнее выражение при бесконечно большом n превращается в

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(i\varphi)^k}{k!}$$

Сумма ряда комплексных чисел. Для строгого обоснования приведенных выше результатов Эйлера, мы прежде всего должны построить теорию рядов для комплексных чисел. Мы распространим всю теорию без всяких потерь на так называемые *абсолютно сходящиеся* ряды. Ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} z_k$ комплексных чисел называется *абсолютно сходящимся*, если сходится ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |z_k|$ его абсолютных величин.

Для абсолютно сходящегося комплексного ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} z_k$ мы определим вещественную и мнимую части всей суммы раздельно формулами

$$\operatorname{Re}\sum_{k=1}^{\infty} z_k = \sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{Re} z_k \qquad \operatorname{Im}\sum_{k=1}^{\infty} z_k = \sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{Im} z_k \tag{9.4}$$

ряды в правой части этих формул абсолютно сходятся, так как $|\operatorname{Re} z_k| \le |z_k|$ и $|\operatorname{Im} z_k| \le |z_k|$.

Теорема 1. *Для любой пары абсолютно сходящихся рядов* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ *и* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ *их почленная сумма* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (a_k + b_k)$ *абсолютно сходится и имеет место равенство*

$$\sum_{k=1}^{\infty}(a_k + b_k) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k + \sum_{k=1}^{\infty} b_k. \tag{9.5}$$

Доказательство. Во-первых заметим, что абсолютная сходимость рядов в левой части вытекает из модульного неравенства $|a_k + b_k| \leq |a_k| + |b_k|$ и абсолютной сходимости рядов в правой части.

Равенство (9.5) расщепляется на пару равенств, одно для вещественной, другое — для мнимой частей. Так как для вещественных рядов почленное сложение доказано, мы можем написать следующую цепь равенств:

$$\operatorname{Re}\left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k + \sum_{k=1}^{\infty} b_k\right) = \operatorname{Re}\sum_{k=1}^{\infty} a_k + \operatorname{Re}\sum_{k=1}^{\infty} b_k = \sum_{k=1}^{\infty}\operatorname{Re} a_k + \sum_{k=1}^{\infty}\operatorname{Re} b_k =$$
$$\sum_{k=1}^{\infty}(\operatorname{Re} a_k + \operatorname{Re} b_k) = \sum_{k=1}^{\infty}\operatorname{Re}(a_k + b_k) = \operatorname{Re}\sum_{k=1}^{\infty}(a_k + b_k),$$

которая доказывает равенство вещественных частей в (9.5). То же доказательство проходит и для мнимых частей.

□

Теорема 2. *Если ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |z_k|$ *абсолютно сходится, то для любого комплексного* c *абсолютно сходится ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |cz_k|$ *и имеет место равенство* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} cz_k = c\sum\limits_{k=1}^{\infty} z_k$.

Доказательство. Правило почленного умножения для положительных чисел дает доказательство первого утверждения теоремы $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |cz_k| = \sum\limits_{k=1}^{\infty} |c||z_k| = |c|\sum\limits_{k=1}^{\infty} |z_k|$.

Пусть сначала c вещественно, а z_k комплексны.

В этом случае $\operatorname{Re} cz_k = c\operatorname{Re} z_k$. Следовательно,

$$\operatorname{Re}\sum_{k=1}^{\infty} cz_k = \sum_{k=1}^{\infty}\operatorname{Re} cz_k = \sum_{k=1}^{\infty} c\operatorname{Re} z_k = c\sum_{k=1}^{\infty}\operatorname{Re} z_k = c\operatorname{Re}\sum_{k=1}^{\infty} z_k = \operatorname{Re} c\sum_{k=1}^{\infty} z_k$$

Тоже самое верно и для мнимых частей.

Пусть теперь $c = i$.

Так как $\operatorname{Re} iz_k = -\operatorname{Im} z_k$ и $\operatorname{Im} iz_k = \operatorname{Re} z_k$. Поэтому для вещественных частей будет

$$\operatorname{Re}\sum_{k=1}^{\infty} iz_k = \sum_{k=1}^{\infty}\operatorname{Re}(iz_k) = \sum_{k=1}^{\infty} -\operatorname{Im} z_k =$$

$$-\sum_{k=1}^{\infty}\operatorname{Im} z_k = -\operatorname{Im}\sum_{k=1}^{\infty} z_k = \operatorname{Re} i\sum_{k=1}^{\infty} z_k$$

Общий случай. $c = a + bi$ с вещественными a, b.
Тогда

$$c\sum_{k=1}^{\infty} z_k = a\sum_{k=1}^{\infty} z_k + ib\sum_{k=1}^{\infty} z_k = \sum_{k=1}^{\infty} az_k + \sum_{k=1}^{\infty} ibz_k = \sum_{k=1}^{\infty}(az_k + ibz_k) = \sum_{k=1}^{\infty} cz_k$$

□

Формула объединения сумм. Для начала докажем следующее неравенство:

$$\left|\sum_{k=1}^{\infty} z_k\right| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |z_k| \tag{9.6}$$

Доказательство. Для вещественных чисел x_k модульное неравенство получается в результате суммирования неравенств $-|x_k| \leq x_k \leq |x_k|$, которое дает $-\sum_{k=1}^{\infty}|x_k| \leq \sum_{k=1}^{\infty} x_k \leq \sum_{k=1}^{\infty}|x_k|$, что и доказывает модульное неравенство для вещественных чисел $\left|\sum_{k=1}^{\infty} x_k\right| \leq \sum_{k=1}^{\infty}|x_k|$. Если z_k комплексны, но имеют вещественную сумму, то модульное неравенство в этом случае выводится из неравенства для вещественных чисел ввиду равенств:

$$\sum_{k=1}^{\infty} z_k = \operatorname{Re}\sum_{k=1}^{\infty} z_k = \sum_{k=1}^{\infty}\operatorname{Re} z_k$$

В общем случае рассмотрим $\alpha = \left|\sum_{k=1}^{\infty} a_k\right| / \sum_{k=1}^{\infty} a_k$. Тогда $|\alpha| = 1$ и $\left|\alpha\sum_{k=1}^{\infty} z_k\right| = \left|\sum_{k=1}^{\infty} z_k\right|$ поэтому модульное неравенство для ряда $\sum_{k=1}^{\infty} z_k$ следует из модульного неравенства для $\sum_{k=1}^{\infty}\alpha z_k$, которое справедливо, так как сумма последнего вещественна. □

Теорема 3. *Для любого разбиения $I = \bigsqcup_{j\in J} I_j$ индексного множества абсолютно суммируемого массива $\{a_i\}_{i\in I}$ комплексных чисел имеет место равенство (правая часть определена)*

$$\sum_{i\in I} a_i = \sum_{j\in J}\sum_{i\in I_j} a_i. \tag{9.7}$$

Доказательство. То что правая часть определена выводится из модульного неравенства. Вначале рассматриваем случай вещественных чисел. Расписываем правую часть в виде разности сумм положительных и отрицательных частей. Применяем к частям закон ассоциативности для неотрицательных чисел и применяем теорему о почленной разности.

Далее берем правую часть расщепляем на вещественную и мнимую части, применяем вещественную теорему. □

Экспонента Экспоненциальный ряд

$$1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + \dots \tag{9.8}$$

абсолютно сходится при любом z, что легко получить с помощью признака Даламбера, и определяет однозначную функцию $\exp z$ на всей комплексной плоскости.

Подстановка в (9.8) $z = i\varphi$ для вещественного φ дает степенной ряд, вещественная часть которого, согласно формуле Эйлера, представляет $\cos\varphi$, а мнимая часть — $\sin\varphi$. И комплексная формула (9.1), таким образом эквивалентна паре вещественных

$$\sin\varphi = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^n \frac{\varphi^{2n+1}}{(2n+1)!} \qquad \cos\varphi = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^n \frac{\varphi^{2n}}{(2n)!}$$

Теорема 4 (сложения). *Для любых комплексных z, w справедливо равенство* $\exp(z+w) = \exp z \exp w$

Доказательство. В силу теоремы Коши (которая в комплексном случае формулируется и доказывается точно также как в вещественном) произведение рядов $\exp z \exp w$ представляется рядом $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k$, где $c_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{z^k w^{n-k}}{k!(n-k)!}$. А n-ый член ряда, представляющего $\exp(z+w)$ равен $\frac{(z+w)^n}{n!}$. Последнее выражение, будучи разложено по формуле бинома Ньютона, как раз дает c_n. □

Определим *аналитические косинус и синус* равенствами $c(x) = \frac{\exp ix + \exp(-ix)}{2}$ и $s(x) = \frac{\exp ix - \exp(-ix)}{2i}$. Тогда

$$c^2(x) + s^2(x) = \frac{1}{4}(\exp(2ix) + 2 + \exp(-2ix)) - \frac{1}{4}(\exp(2ix) - 2 + \exp(-2ix)) = 1$$

. При $x \leq 1$ аналитические синус и косинус положительны, что легко видеть из представляющих их рядов (знакопеременных с убывающими по абсолютной величине членами). Поэтому главное значение аргумента $A(x)$ числа $\exp(ix) = c(x) + is(x)$ лежит в первой четверти и при $x, y < 1$ функция $A(x)$ аддитивна: $A(x+y) = A(x) + A(y)$,ибо аргумент произведения равен сумме аргументов, поэтому $2A(\frac{x+y}{2}) = A(x) + A(y)$ и по теореме **3** лекции 7 из этого вытекает линейность функции $A(x)$ на отрезке $[0,1]$. А так как $A(0) = 0$, то $A(x) = A(1)x$ для $x \in [0,1]$. Таким образом для $k = \frac{1}{A(1)}$ при $x \in [0,1]$ имеют место равенства $\sin x = s(kx)$ и $\cos x = c(kx)$. Формулы двойного угла для аналитических синуса и косинуса такие же как для геометрических, поэтому из их совпадения на каком-то отрезке вытекает совпадение на вдвое большем, вчетверо большем и т.д. То есть на всей положительной полуоси. Отсюда в свою очередь соображения четности и нечетности обеспечивают совпадение на всей действительной оси.

Таким образом для полного доказательства формулы Эйлера осталось убедиться, что $k = 1$. Это мы сделаем в следующей лекции.

Биномиальный ряд. Точно такое же рассуждение с умножением рядов как в вещественном случае, позволяет доказать биномиальную формулу для рационального показателя. Здесь правда остается один тонкий момент: дробные степени для комплексных чисел многозначны и не сразу понятно, к которому из значений сходится ряд. К этому вопросу мы вернемся позднее. Но для целых отрицательных степеней все однозначно, поэтому для них (в частности, для геометрического ряда) справедливы обычные формулы. Сумма геометрического ряда с комплексным знаменателем дается формулой

$$\sum_{k=0}^{\infty} z^k = \frac{1}{1-z}. \tag{9.9}$$

Тригонометрические ряды. Комплексные числа эффективно применяются для суммирования *тригонометрических рядов*, т.е. рядов типа $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k \cos kx$ и $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k \sin kx$. Например, ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} q^k \sin k\varphi$ дополняется двойственным $\sum\limits_{k=0}^{\infty} q^k \cos k\varphi$, чтобы образовать комплексный ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} q^k(\cos k\varphi + i \sin k\varphi)$. Последний представляет собой комплексную геометрическую прогрессию. Его сумма равна $\frac{1}{1-z}$, где $z = \cos\varphi + i\sin\varphi$. Теперь сумма ряда синусов $\sum\limits_{k=1}^{\infty} q^k \sin k\varphi$ равна $\operatorname{Im}\frac{1}{1-z}$, мнимой части комплексного ряда, и вещественная часть комплексного ряда совпадает с суммой ряда косинусов.

В частности, для $q = 1$, имеем $\frac{1}{1-z} = \frac{1}{1+\cos\varphi+i\sin\varphi}$. Чтобы вычислить вещественную и мнимую части умножим и числитель и знаменатель на $1+\cos\varphi - i\sin\varphi$. В результате получаем $(1-\cos\varphi)^2 + \sin^2\varphi = 1 - 2\cos^2\varphi + \cos^2\varphi + \sin^2\varphi = 2 - 2\cos\varphi$ как знаменатель. Следовательно $\frac{1}{1-z} = \frac{1-\cos\varphi+i\sin\varphi}{2-2\cos\varphi} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2}$. и мы получили две замечательные формулы для сумм расходящихся рядов.

$$\sum_{k=0}^{\infty} \cos k\varphi = \frac{1}{2}, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \sin k\varphi = \frac{1}{2}\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2}.$$

Тригонометрические функции комплексного переменного В силу формулы Эйлера экспонента комплексного переменного выражается через элементарные функции действительного переменного

$$e^{x+iy} = e^x(\cos y + i\sin y) \tag{9.10}$$

Теорема умножения

$$\exp z \exp w = \exp(z+w)$$

также немедленно вытекает из формулы (9.10).

С другой стороны Формула Эйлера позволяет выразить через экспоненту все тригонометрические функции и определить их как функции комплексной переменной

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \qquad \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \qquad \operatorname{tg} z = -i\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{e^{iz} + e^{-iz}} \tag{9.11}$$

Задачи.

1. Вычислить i^i, e^{e^i}
2. Решить уравнение $\sin z = 5/3$
3. Суммировать ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{\sin k}{k!}$
4. Разложить в степенной ряд $e^x \cos x$
5. Суммировать ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (-1)^k \dfrac{\cos 2k}{(2k)!}$
6. Доказать монотонность $\frac{\sin x}{x}$ на отрезке $[0, \frac{\pi}{2}]$
7. Суммировать $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{k \cos k}{2^k}$

10 Предел последовательности

Бесконечно-малые последовательности. Лейбниц определял (положительное) бесконечно-малое число как число меньшее любого положительного, но отличное от нуля. Позднее Коши вместо рассмотрения бесконечно малых чисел стал рассматривать (бесконечные) последовательности обычных чисел, называя такую последовательность *бесконечно малой*, если она становится меньше любого положительного числа.

Последовательность (комплексных) чисел $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ называется *бесконечно малой*, если для любого положительного ε неравенство $|z_n| < \varepsilon$ выполняется для всех n, начиная с некоторого $N(\varepsilon)$.

Операции над последовательностями определяются *почленно*: то есть *суммой, разностью, произведением и частным* двух последовательностей $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ называются соответственно последовательности $\{x_n+y_n\}$, $\{x_n-y_n\}$ $\{x_n y_n\}$ $\{x_n/y_n\}$.

Лемма 10.1. *Сумма бесконечно малых последовательностей является бесконечно малой последовательностью.*

Доказательство. Пусть $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ — две бесконечно-малые последовательности. Для данного положительного ε нам нужно указать номер $N(\varepsilon)$, начиная с которого выполнено неравенство $|x_n + y_n| < \varepsilon$. Условие бесконечной малости первой последовательности позволяет найти такое N_1, что при $n > N_1$ имеет место неравенство $|x_n| < \varepsilon/2$. Условие бесконечной малости второй последовательности позволяет найти такое N_2, что при $n > N_2$ имеет место неравенство $|x_n| < \varepsilon/2$. В таком случае при $n > \max\{N_1, N_2\}$ имеем неравенство

$$|x_n + y_n| \leq |x_n| + |y_n| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

□

Последовательность, все члены которой равны одному и тому же числу, называется *постоянной.*

Лемма 10.2. *Постоянная последовательность является бесконечно-малой в том и только том случае, когда все ее члены равны нулю.*

Доказательство. Если все члены последовательности x_n равны c и $|c| > 0$, то при $\varepsilon = |c|$ неравенство $|x_n| < \varepsilon$ не будет выполнено ни при каком n, откуда следует, что последовательность не является бесконечно-малой. В то же время последовательность нулей, очевидно, бесконечно-малой является. □

Лемма 10.3. *Бесконечно-малая последовательность положительных чисел содержит наибольший элемент.*

Доказательство. Рассмотрим первый элемент последовательности. Так как он положителен, то имеется лишь конечное число элементов последовательности его превосходящих. Среди этого конечного множества чисел есть наибольшее. Оно и будет наибольшим элементом последовательности. □

Последовательность $\{z_n\}$ называется *ограниченной*, если найдется такая константа M, что неравенство $|z_n| \leq M$ выполнено для всех членов последовательности. Доказанная выше лемма позволяет заключить, что всякая бесконечно-малая последовательность ограниченна.

Лемма 10.4. *Произведение ограниченной (в частности, бесконечно-малой) последовательности на бесконечно-малую является бесконечно-малой последовательностью.*

Доказательство. Пусть $\{x_n\}$ — бесконечно-малая и $\{y_n\}$ ограниченная константой C последовательность. Пусть дано $\varepsilon > 0$. Тогда неравенство $|x_n| < \frac{\varepsilon}{C}$ выполняется начиная с некоторого N. Но это неравенство влечет $|x_n y_n| < |x_n|C < \varepsilon$, что и доказывает бесконечно-малость произведения. □

Следующая часто применяемая лемма называется *леммой о милиционерах.*

Лемма 10.5 (о милиционерах). *Пусть даны три последовательности, любые члены которых удовлетворяют неравенствам $a_n \leq b_n \leq c_n$. Тогда из бесконечно-малости двух крайних последовательностей $\{a_n\}$ и $\{c_n\}$ (милиционеров) вытекает бесконечная малость средней последовательности $\{b_n\}$.*

Доказательство. Пусть дано положительное ε. Тогда неравенства $|a_n| < \varepsilon$ и $|c_n| < \varepsilon$ выполнены начиная с некоторых N_1 и N_2 в силу условия о бесконечной малости милиционеров. Тогда при $n > N = \max\{N_1, N_2\}$ выполнены оба неравенства. Значит, при $n > N$ п имеем $-\varepsilon < a_n$ и $c_n < +\varepsilon$. Откуда $-\varepsilon < b_n < +\varepsilon$. То есть $|b_n| < \varepsilon$. □

Предел последовательности. Число Z называется *пределом* последовательности (обозначение $Z = \lim z_n$ или $z_n \to Z$), если при любом $\varepsilon > 0$ неравенство

$$|z_n - Z| < \varepsilon$$

выполнено при всех n, начиная с некоторого $N(\varepsilon)$. Иными словами, если бесконечно-малой является последовательность разностей $\{Z - z_n\}$.

Далеко не любая последовательность имеет предел, например, предела не имеет последовательность $(-1)^n$. Последовательность, имеющая предел называется *сходящейся.*

Лемма 10.6. *Сумма постоянной и бесконечно-малой последовательностей является сходящейся последовательностью. И всякая сходящаяся последовательность единственным образом представляется в виде суммы постоянной и бесконечно-малой последовательностей.*

Теорема 1 (о сумме-разности пределов). *Если $\lim z_n = Z$ и $\lim w_n = W$, то $\lim(z_n \pm w_n) = Z \pm W$.*

Доказательство. $z_n = Z + \zeta_n$ и $w_n = W + \omega_n$. И теорема вытекает из того, что сумма бесконечно-малых бесконечно-малая. □

Теорема 2 (о пределе произведения). *Если $\lim a_n = A$ и $\lim b_n = B$, то последовательность произведений сходится и имеет пределом $\lim a_n b_n = AB$.*

Доказательство. Так как $a_n = A+\alpha_n$ и $b_n = B+\beta_n$, то $a_nb_n = AB+A\beta_n+B\alpha_n+\alpha_n\beta_n$, где последние три слагаемых бесконечномалые. □

Теорема 3 (предельный переход в неравенстве). *Если $a_k \le b_k$ при любом k, то $\lim a_k \le \lim b_k$.*

Доказательство. Предположим противное, что $A = \lim a_k > B = \lim b_k$. Рассмотрим $C = (A+B)/2$. Тогда $\lim a_n > C$ и потому начиная с некоторого n будет $a_n > C > B$. Но при таких n и $b_n > C$. С другой стороны $\lim b_n < C$, поэтому $b_n < C$ при достаточно больших n. Противоречие. □

Лемма о милиционерах для сходящихся последовательностей вытекает из частного случая бесконечно-малых.

Теорема 4 (о пределе частного). *Если $\lim a_n = A$, $\lim b_n = B \neq 0$, то последовательность частных $\frac{a_n}{b_n}$ сходится и $\lim \frac{a_n}{b_n} = \frac{A}{B}$.*

Доказательство. Начнем с того, что докажем ограниченность последовательности $\frac{1}{b\,n}$. Так как $\lim b_n = B \neq 0$, то почти для всех n выполнено неравенство $|b_n - B| < |B|/2$, из которого следует, что $|b_n| > |B|/2$. Поэтому почти всегда выполнено неравенство $\frac{1}{|b_n|} < \frac{2}{B}$. Из конечного числа членов последовательности $\frac{1}{b_n}$, не удовлетворяющих этому неравенству, если таковые найдутся, выберем наибольший по абсолютной величине, и тогда уже все элементы этой последовательности будут ограничены по абсолютной величине этим наибольшим значением.

Нам достаточно доказать, что

$$0 = \lim\left(\frac{a_n}{b_n} - \frac{A}{B}\right) = \lim\frac{a_nB - b_nA}{b_nB}$$

В силу установленной выше ограниченности последовательности $\frac{1}{b_n}$, нужное нам утверждение вытекает из бесконечной малости произведения ограниченной и бесконечно-малой последовательностей в силу равенства $\lim(a_nB - b_nA) = \lim a_nB - \lim b_nA = AB - BA = 0$. □

Первый замечательный предел Периметр вписанного в окружность правильного многоугольника с ростом числа сторон возрастает, стремясь к некоторому пределу, называемому длиной окружности. Длина стороны правильного n-угольника, вписанного в единичную окружность, равна $2\sin\frac{180^\circ}{n}$ и половина его периметра с ростом n стремится к длине полуокружности, которая является самой важной математической постоянной и обозначается греческой буквой π, которая является первой буквой греческого слова $\pi\epsilon\rho\iota\varphi\epsilon\rho\iota\alpha$, означающего "окружность"

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} n\sin\frac{180^\circ}{n} = \pi} \tag{10.1}$$

Полуокружность единичного радиуса, содержащая 180°, имеет длину π, а дуга окружности, имеющая x° имеет длину $\frac{x}{180}\pi$, что является формулой перехода от градусной к радианной мере угла. Если аргумент синуса мерить в радианах, и поделить обе части формулы (10.2) на π, то она примет следующий вид примет следующий вид

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sin(\pi/n)}{\pi/n} = 1 \tag{10.2}$$

В этой формуле $\{\pi/n\}$ уже оказывается возможно заменить на любую бесконечномалую последовательность. Поэтому замечательный предел (10.2) приобрел в современных учебниках вид

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

Последняя формула на языке теории пределов соответствует выражению Эйлера "синус бесконечно-малой дуги равен дуге". Доказательство этой формулы основано на следующих, известных из геометрии, неравенствах:

$$\sin x \leq x \leq \operatorname{tg} x, \tag{10.3}$$

справедливых для углов в первой четверти.

Теорема 5 (первый замечательный предел). *Если* $\lim x_n = 0$, *то*

$$\lim \frac{\sin x_n}{x_n} = 1$$

Доказательство. Во-первых, заметим, что $1-\cos x_n = 2\sin^2 x_n$ бесконечномало при бесконечномалой x_n. Поэтому $\cos x_n \to 1$ при $x_n \to 0$. Неравенства (10.3) дают следующие:

$$\cos x_n \leq \frac{\sin x_n}{x_n} < 1$$

и лемма о милиционерах дает нужный результат. □

Теперь мы в состоянии довершить доказательство формулы Эйлера. Согласно доказанному имеем

$$\sin x = kx - \frac{k^3x^3}{6} + \dots$$

Отсюда вытекают неравенства

$$kx - \frac{k^3x^3}{6} \leq \sin x \leq kx$$

Деля на x эти неравенства и переходя к пределу при $x \to 0$ заключаем $k = 1$.

Второй замечательный предел Вторым замечательным пределом называется $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, который совпадает с e — основанием натуральных логарифмов.

Доказательству этой теоремы мы предпошлем следующую лемму, которая является логарифмической формой второго замечательного предела

Лемма 10.7. *Для любой бесконечномалой последовательность* $x_n \to 0$ *имеет место равенство*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln(1+x_n)}{x_n} = 1$$

Доказательство. Действительно, нам известны неравенства

$$\frac{x_n}{1+x_n} \leq \ln(1+x_n) \leq x_n$$

Деля эти неравенства на x_n и переходя к пределу в полученных неравенствах, с помощью леммы о милиционерах получаем нужный результат. □

Теорема 6 (о пределе логарифмов). *Последовательность положительных чисел* x_n, *сходится к положительному числу* x *в том и только том случае, когда последовательность логарифмов* $\ln x_n$ *сходится к* $\ln x$

Доказательство.

$$\ln x_n - \ln x = \ln \frac{x_n}{x} = \ln\left(1 + \frac{x_n - x}{x}\right) = \frac{\ln\left(1 + \frac{x_n - x}{x}\right)}{\frac{x_n - x}{x}} \frac{x_n - x}{x}$$

Откуда в силу леммы 10.7, следует, что бесконечная малость разности $x - x_n$ равносильна бесконечной малости разности логарифмов $\ln x_n - \ln x$. □

Теорема 7 (о пределе степени). *Пусть* $x_n \to x > 0$, $y_n \to y$. *Тогда* $x_n^{y_n} \to x^y$

Доказательство. В силу теоремы **6** достаточно доказать, что последовательность логарифмов $\ln(x_n^{y_n}) = y_n \ln x_n$ сходится к $y \ln x$. Это так в силу теоремы о пределе произведения и равенства $\lim \ln x_n = x$, обеспечиваемого все той же теоремой **6**. □

Теперь, обещанный результат, о том что последовательность $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ имеет пределом основание натуральных логарифмов вытекает из следующего, более общего результата

Теорема 8. *Для любого действительного числа* x *последовательность* $\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$ *сходится и* $\ln \lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = x$

Доказательство. Сходимость последовательности $\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$ в силу теоремы о непрерывности логарифма равносильна сходимости последовательности ее логарифмов. А последовательность логарифмов $\ln\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$ сходится к x в силу леммы 10.7. Поэтому доказательство завершается ссылкой на теорему непрерывности логарифма. □

Задачи.

1. Дать определение бесконечно большой последовательности $a_n \to +\infty$ и доказать, что сумма бесконечно больших бесконечно большая (вариант сумма ограниченной и б.б.)

2. Пусть $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ суть две бесконечно большие последовательности, для которых существует предел отношения разностей $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\Delta a_n}{\Delta b_n}$. Тогда существует и предел отношения $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}$ и имеет место равенство

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\Delta a_n}{\Delta b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}$$

3. Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^k}{2^n} = o$

4. Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n} = o$

11 Ряд и предел

Наиболее тонким моментом в приведенных ранее доказательствах Эйлера о разложении тригонометрических и показательных функций в степенные ряды является замена неограниченно растущего числа слагаемых на бесконечно-мало отличающиеся от них. Следующий пример показывает, что этого, вообще говоря, этого делать нельзя:

$$1 = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n}$$

Если подставить в это равенство бесконечно большое n, то в правой части, следуя логике Эйлера мы получим ноль. Поэтому доказательства Эйлера неполны. Изложенная ниже теория, созданная два века спустя после Эйлера замечательным немецким математиком Вейерштрассом, позволяет восполнить эти пробелы в рассуждениях Эйлера.

Начнем мы с установления связи между понятием суммы ряда и понятием предела.

Положительные ряды и монотонные последовательности. Если члены ряда суть положительные числа, то частичные суммы ряда образуют монотонно возрастающую последовательность, которая сходится (имеет конечный предел) в том и только том случае, когда сходится (т.е. его частичные суммы ограничены) ряд, как вытекает из следующей теоремы Больцано-Вейерштрасса.

Теорема 1 (о пределе монотонной последовательности). *Всякая монотонная ограниченная последовательность сходится.*

Доказательство. Рассмотрим случай неубывающей последовательности. Для числа x обозначим через $x[k]$ его k-ую после запятой цифру десятичной записи (цифры до запятой обозначаются отрицательными k). Тогда последовательность $x_n[k]$ при фиксированном k стабилизируется, то есть становится постоянной, начиная с некоторого номера. Действительно, ведь каждое изменение этой последовательности означает увеличение целой части числа $10^k x_n$ как минимум на единицу. Но эта последовательность ограничена. Следовательно, для любого k существует номер $N(k)$, начиная с которого $x_n[k]$ не меняется. Обозначим через $X[k]$ это значение, на котором стабилизируется k-ая цифра и обозначим через X число, которое своей k-ой цифрой имеет $X[k]$. Тогда при n большем чем $\max_{j\leq k} N(j)$, у X и x_n совпадают все цифры вплоть до k-ой цифры после запятой, поэтому $|X - x_n| < 10^{-k}$ откуда видно, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = X$.

Аналогично доказывается теорема в случае невозрастающей последовательности.

□

Предел последовательности комплексных чисел. Последовательность комплексных чисел $\{z_n\}$ называется бесконечно-малой, если $\lim\limits_{n\to\infty} |z_n| = 0$. Комплексное число z называется пределом последовательности $\{z_n\}$, если бесконечно-малой является последовательность разностей $\{z - z_n\}$.

Теорема 2. *Равенство* $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z$ *равносильно паре равенств* $\lim\limits_{n\to\infty} \operatorname{Re} z_n = \operatorname{Re} z$ *и* $\lim\limits_{n\to\infty} \operatorname{Im} z_n = \operatorname{Im} z$.

Доказательство. Это немедленно следует из неравенств $\max\{|\operatorname{Re} z_n|, |\operatorname{Im} z_n|\} \leq |z - z_n| \leq |\operatorname{Re} z_n| + |\operatorname{Im} z_n|$ □

Таким образом теория пределов комплексных чисел сводится к теории пределов вещественных чисел, и доказанные на предыдущей лекции теоремы о пределах суммы, разности, произведения и частного справедливы и для последовательностей комплексных чисел.

Сумма ряда как предел.

Теорема 3. *Если ряд (комплексный или вещественный)* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} z_k$ *сходится абсолютно, то* $\lim \sum\limits_{k=1}^{n} z_k = \sum\limits_{k=1}^{\infty} z_k$.

Доказательство. Для положительного ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ при любом положительном ε разность $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k - \varepsilon$ не может ограничивать сверху все частичные суммы ряда. Значит, для некоторого n будет выполнено неравенство $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k > \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k - \varepsilon$. Тогда при любом $m > n$ имеем неравенства $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k > \sum\limits_{k=1}^{m} a_k > \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k - \varepsilon$, откуда получаем, что разность между полной суммой и частичной является бесконечно-малой последовательностью. Следовательно, *полная сумма положительного ряда равна пределу его частичных сумм.*

Если все z_k вещественны, то $z_k = z_k^+ - z_k^-$. В силу теоремы о сумме-разности пределов имеем

$$\lim \sum_{k=1}^{n} z_k^+ + \lim \sum_{k=1}^{\infty} (-z_k^-) = \lim \sum_{k=1}^{n} (z_k^+ - z_k^-) = \lim \sum_{k=1}^{n} z_k, \tag{11.1}$$

А так как $\lim \sum\limits_{k=1}^{n} z_k^+ = \sum\limits_{k=1}^{\infty} z_k^+$ и $\lim \sum\limits_{k=1}^{n} z_k^- = \sum\limits_{k=1}^{\infty} z_k^-$ в силу справедливости теоремы для положительных рядов, то левая часть в (11.1) равна $\sum\limits_{k=1}^{\infty} z_k$, что доказывает теорему для вещественного случая.

Тогда в общем случае имеем $\lim \sum\limits_{k=1}^{n} \operatorname{Re} z_k = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \operatorname{Re} z_k$ и $\lim \sum\limits_{k=1}^{n} \operatorname{Im} z_k = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \operatorname{Im} z_k$. Поэтому из теоремы о сумме пределов получаем $\lim \sum\limits_{k=1}^{n} z_k = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \operatorname{Re} z_k + i \sum\limits_{k=1}^{\infty} \operatorname{Im} z_k = \sum\limits_{k=1}^{\infty} z_k$. □

Теорема 4 (Вейерштрасс). *Если сходится ряд максимумов модулей бесконечно-малых последовательностей, то почленная сумма этих последовательностей является бесконечно-малой.*

Доказательство. Пусть дана двойная последовательность $\{x_n^j\}_{j,n=1}^{\infty}$, с конечной суммой максимумов $\sum\limits_{j=1}^{\infty} \max_{n\in\mathbb{N}} |x_n^j| < \infty$, в которой бесконечномалыми является при фиксированном j являются последовательности $\{x_n^j\}_{n=1}^{\infty}$.

Пусть дано положительное ε. Конечность суммы ряда максимумов позволяют фиксировать такое натуральное N, для которого

$$\sum_{j=N}^{\infty} \max_{n\in\mathbb{N}} |x_n^j| < \varepsilon/2 \tag{11.2}$$

Далее для любого $j < N$ в силу бесконечно-малости $\{x_n^j\}_{n=1}^{\infty}$ найдется такое N_j, что при $n > N_j$.

$$|x_n^j| < \frac{\varepsilon}{2N} \tag{11.3}$$

Пусть M равно максимуму из N_j $(j < N)$ Тогда для любого $n > M$ из неравенств (11.2) и (11.3) вытекает следующая оценка суммы

$$\left|\sum_{j=1}^{\infty} x_n^j\right| \leq \left|\sum_{j=1}^{N-1} x_n^j\right| + \left|\sum_{j=N}^{\infty} x_n^j\right| \leq \sum_{j=1}^{N-1} |x_n^j| + \sum_{j=N}^{\infty} \max_{n\in\mathbb{N}} |x_n^j| \leq$$
$$\leq \frac{(N-1)\varepsilon}{2N} + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

Откуда и вытекает бесконечная малость последовательности сумм $\sum\limits_{j=1}^{\infty} x_n^j$.

□

Назовем *отклонением* сходящейся последовательности $\{z_n\} \to a$ максимум из модулей разностей $|z_n - a|$

Теорема 5 (о пределе суммы ряда). *Пусть дана двойная последовательность $\{x_n^j\}$, такая что*

1. *при любом j существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} x_n^j$*
2. *сходится ряд пределов $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \lim\limits_{n\to\infty} x_n^j$.*
3. *и сходится ряд отклонений $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \max_{n\in\mathbb{N}} |x_n^j - \lim\limits_{n\to\infty} x_n^j|$*

тогда

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{j\in J} x_n^j = \sum_{j\in J} \lim_{n\to\infty} x_n^j,$$

(в частности предел слева существует).

Доказательство. Нам нужно доказать, что бесконечно-малой (по n) является разность

$$\sum_{j\in J} x_n^j - \sum_{j\in J} \lim_{n\to\infty} x_n^j = \sum_{j\in J} (x_n^j - \lim_{n\to\infty} x_n^j),$$

что вытекает из теоремы о сумме ряда бесконечно-малых. □

Доказательство формулы Эйлера. На языке теории пределов подстановка бесконечно большого значения натурального параметра в формулу интерпретируется как предельный переход, при стремлении заменяемого параметра к бесконечности. Таким образом этот основной шаг доказательства Эйлера соответствует следующему равенству

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{n^{\underline{k}}}{k!}\cos^{n-k}\frac{\varphi}{n}i^k\sin^k\frac{\varphi}{n}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\varphi^k i^k}{k!} \tag{11.4}$$

Эйлер заменяет синус бесконечно-малой дуги самой дугой, заменяет единицей отношение $\frac{n^{\underline{k}}}{n^k}$ факториальной степени к обычной для бесконечно-большого n и заменяет косинус бесконечно-малого угла единицей. Первая замена соответствует первому замечательному пределу, а вторая — элементарному пределу $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^{\underline{k}}}{n^k}=1$. Наименее очевидна последняя замена, ведь для доказательства нам мало знать, что косинус бесконечно-малой дуги стремится к единице. Нам потребуется более сильное утверждение

Лемма 11.1. *При любом x имеет место равенства*

$$\lim\cos^n\left(\frac{x}{n}\right)=1$$

Доказательство. Во-первых, заметим, что

$$1\geq\cos x=1-2\sin^2\frac{x}{2}\geq 1-\frac{x^2}{2} \tag{11.5}$$

Теперь нужный нам результат вытекает из леммы о милиционерах, если доказать, что

$$\lim\left(1-\frac{x^2}{n^2}\right)^n=1$$

. Применяя биномиальное разложение, получаем

$$\left(1-\frac{x^2}{n^2}\right)^n=1+\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\frac{x^{2k}}{n^{2k}}\frac{n^{\underline{k}}}{k!} \tag{11.6}$$

Заменяя члены суммы на большие их по абсолютной величине члены геометрической прогрессии, получаем следующую оценку

$$\left|\left(1-\frac{x^2}{n^2}\right)^n-1\right|\leq\sum_{k=1}^{n}\frac{x^{2k}}{n^{2k}}\frac{n^{\underline{k}}}{k!}\leq\sum_{k=1}^{n}\frac{x^{2k}}{n^k}<\frac{x^2}{n}\frac{1}{1-\frac{x^2}{n}}$$

Последнее выражение, (представляющее сумму бесконечной геометрической прогрессии) очевидно, имеет своим пределом ноль. □

Теперь мы готовы доказать следующее утверждение, частично оправдывающее рассуждения Эйлера.

Лемма 11.2. *Для любого k имеет место равенство*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^{\underline{k}}}{k!}\cos^{n-k}\frac{\varphi}{n}i^k\sin^k\frac{\varphi}{n}=\frac{\varphi^k i^k}{k!}$$

Доказательство. Действительно, из леммы 11.1 вытекает, что

$$\lim_{n\to\infty} \cos^{n-k}\frac{\varphi}{n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} \cos^n \frac{\varphi}{n}}{\lim\limits_{n\to\infty} \cos^k \frac{\varphi}{n}} = 1 \tag{11.7}$$

Из теоремы о первом замечательном пределе получаем

$$\lim_{n\to\infty} n^k i^k \sin^k \frac{\varphi}{n} = i^k \varphi^k \tag{11.8}$$

И,наконец, нетрудно видеть, что

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^{\underline{k}}}{k! n^k} = \frac{1}{k!} \tag{11.9}$$

Действительно, равенство $\lim \frac{n^{\underline{k}}}{n^k} = 1$ следует из теоремы о пределе произведения, поскольку дробь $\frac{n^{\underline{k}}}{n^k}$ является произведением k дробей вида $\frac{n-i}{n}$ $(i \leq k)$, каждая из которых стремится к единице.

Наконец, перемножая равенства (11.7), (11.8) и (11.9) получаем нужный результат. □

Для завершения доказательства осталось убедится в применимости теоремы Вейерштрасса.

Лемма 11.3. *При любом n имеет место неравенство*

$$\left| \frac{n^{\underline{k}}}{k!} \cos^{n-k}\frac{\varphi}{n} i^k \sin^k \frac{\varphi}{n} \right| \leq \frac{|\varphi^k|}{k!}$$

Доказательство. Действительно, для доказательства этого неравенства достаточно заменить косинусы единицами а синусы — значениями их аргументов. Получившееся выражение по модулю будет превосходить исходное и примет вид

$$\left| \frac{n^{\underline{k}} i^k}{k!} \frac{|\varphi|^k}{n^k} \right|$$

Если же теперь заменить $n^{\underline{k}}$ на превосходящее его n^k, то с учетом того $|i| = 1$ мы получим требуемое неравенство. □

Задачи.

1. Объясните почему теорема о сумме ряда бесконечно-малых не применима в случае парадокса представления единицы в виде суммы бесконечно-малых $1 = \frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \cdots + \frac{1}{n}$
2. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \sin\frac{1}{n}\right)^n$
3. Найти $\lim\limits_{n\to\infty} \cos^{n^2} \frac{1}{n}$.
4. $\lim(1 + \frac{i}{n})^n$
5. $\lim\limits_{n\to\infty} n \sin 2\pi e n!$
6. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}\right)^n$
7. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{i}{n} + \frac{1}{n^2}\right)^n$

12 Условно сходящиеся ряды.

Условно сходящиеся ряды Как мы выяснили на прошлой лекции предел частичных сумм абсолютно сходящегося ряда комплексных чисел равен полной сумме ряда. Таким образом понятие бесконечной суммы сводится к понятию предела. Возможно и обратное сведение. А именно, для любой последовательности (комплексных) чисел $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ рассмотрим ряд разностей $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \Delta a_k$. Тогда любая частичная сумма этого ряда равна $a_{n+1} - a_1$ и потому абсолютная сходимость ряда разностей влечет сходимость последовательности. Но обратное верно, вообще говоря, неверно.

Числовой ряд называется *условно сходящимся*, если последовательность частичных сумм этого ряда сходится, и ее предел и называется суммой ряда.

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \lim_{n\to\infty}(a_1 + a_2 + \dots a_n)$$

Условно сходящиеся ряды удовлетворяют правилам рекурсии, почленного сложения и умножения, что непосредственно вытекает из соответствующих свойств пределов.

Подпоследовательности Подпоследовательностью последовательности $\{a_n\}_{n\in N}$ называется последовательность вида $\{a_{n_k}\}$, где $\{n_k\}$ — произвольная возрастающая последовательность натуральных чисел. Важнейшими для нас примерами подпоследовательностей являются четная $\{a_{2k}\}$ и нечетная $\{a_{2k+1}\}$ подпоследовательности. Непосредственно из определения предела вытекает такое правило

Теорема 1 (о наследовании сходимости). *Всякая подпоследовательность сходящейся последовательности сходится к тому же пределу.*

В качестве применения свойства наследования сходимости приведем доказательство следующего предложения.

Теорема 2 (о необходимом условии сходимости ряда). *Если числовой ряд сходится то последовательность его членов стремится к нулю.*

Доказательство. Если A_n означает сумму первых n членов ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$. Тогда $\lim A_{n+1} = \lim A_n$ откуда $\lim a_n = \lim a_{n+1} = \lim(A_{n+1} - (A_n) = 0$. □

Авторекурсия пределов. Свойство наследования сходимости может применяется для нахождения пределов методом авторекурсии. Например, вычисление предела $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}$, можно провести следующим образом. Во-первых заметим, что рассматриваемая последовательность имеет предел, потому что она монотонна и ограничена. Ее четная подпоследовательность имеет такой же предел и это дает возможность получить уравнение авторекурсии

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n} = \frac{1}{2} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n},$$

единственным решением которого является 0.

Монотонные подпоследовательности

Лемма 12.1. *Всякая последовательность содержит монотонную подпоследовательность.*

Доказательство. Предположим сначала, что рассматриваемая последовательность $\{x_n\}$ не имеет наибодьшего члена. Теперь по индукции мы можем определить подпоследовательность $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ так что $n_1 = 1$ и $x_{n_{k+1}}$ определяется как член с наименьшим номером большим n_k, для которого $x_{n_{k+1}} > x_{n_k}$. Это построение дает монотонно возрастающую подпоследовательность в любой последовательности без наибольшего элемента. Значит возрастающая подпоследовательность может быть построена в данной последовательности и в том случае, когда она содержит какую-нибудь подпоследовательность без наибольшего члена. В этом случае построение проводится в этой подпоследовательности. Наконец, если всякая подпоследовательность в $\{x_n\}$ имеет наибольший элемент, то мы определим в ней невозрастающую подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$ так что x_{n_1} — наибольший член всей последовательности, а $x_{n_{k+1}}$ определяется как наибольший член подпоследовательности $\{x_n\}_{n\geq n_k}$. □

Лемма 12.2. *Последовательность сходится, если пределы всех ее монотонных подпоследовательностей совпадают.*

Доказательство. Обозначим через A общий предел монотонных подпоследовательностей. Если $a_n - A$ не является бесконечно-малой, то найдется ε для которого неравенство $|a_n - A| > \varepsilon$ выполняется для целой подпоследовательности. Тогда никакая монотонная подпоследовательность этой подпоследовательности, очевидно, не будет иметь A своим пределом. □

Из доказанных лемм непосредственно вытекает такая важная теорема:

Теорема 3. *Всякая ограниченная последовательность содержит сходящуюся подпоследовательность.*

Теорема о расстановке скобок. *Блокировкой* ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} z_k$ по растущей последовательности $\{n_k\}$ натуральных чисел называется ряд, членами которого служат суммы $Z_k = \sum\limits_{j=n_k}^{n_{k+1}-1} z_j$. То есть блокировка по существу представляет собой расстановку скобок в исходном ряде.

Последовательность частичных сумм блокировки представляет собой подпоследовательность частичных сумм исходного ряда. Поэтому блокированный ряд имеет ту же сумму, что и исходный, если последний сходится.

Теорема 4. *Всякий ряд с ограниченными частичными суммами допускает абсолютно сходящуюся блокировку. Если все абсолютно сходящиеся блокировки ряда с ограниченными частичными суммами имеют одинаковые суммы, то ряд сходится.*

Доказательство. Мы ограничимся здесь доказательством вещественного случая. Рассмотрим любую монотонную подпоследовательность $\{S_{n_k}\}$ частичных сумм ряда. Эта последовательность сходится в силу следствия **3**.

В таком случае блокировка рассматриваемого ряда по последовательности $\{n_k+1\}\}$ представляет собой знакопостоянный ряд, суммой которого является предел последовательности $\{S_{n_k}\}$.

А так как последовательность частичных сумм содержит монотонную подпоследовательность (лемма 12.1), то соответствующая ей блокировка дает абсолютно сходящийся ряд. Если же все абсолютно сходящиеся блокировки имеют одну и ту же сумму, то и все монотонные подпоследовательности частичных сумм сходятся к одному пределу — этой самой сумме, и, в силу леммы 12.2 отсюда следует и сходимость всей последовательности частичных сумм, то есть самого ряда.

□

Теорема Римана о перестановках Следующая теорема дает неожиданную характеристику понятия абсолютной сходимости.

Теорема 5 (Риман). *Если вещественный ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ *сходится условно и не сходится абсолютно, тогда для любого числа* A *существует такая перестановка* $\varphi\colon N \to N$ *натурального ряда, что* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_{\varphi(k)} = A$

Доказательство. Обозначим n-ый по порядку неотрицательный член нашего ряда через x_n и n-ый по порядку отрицательный член через y_n. Тогда последовательности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ являются бесконечно малыми как подпоследовательности бесконечно малой последовательности и ряды $\sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k = \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k^+$ и $\sum\limits_{k=1}^{\infty} y_n = -\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_n^-$ расходятся в силу условия теоремы. Ибо сходимость одного из них влечет сходимость другого ввиду сходимости разности $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(a_k^+ - a_k^-)$. По индукции определим две растущие последовательности $\{N_k\}$ и $\{M_k\}$ натуральных чисел так чтобы выполнялись следующие условия.

1. $\sum\limits_{k=1}^{N_k} x_k + \sum\limits_{k=1}^{M_k-1} y_k > A$

2. $\sum\limits_{k=1}^{N_k} x_n + \sum\limits_{k=1}^{M_k} y_k \leq A$

3. $\sum\limits_{k=1}^{N_{k+1}-1} x_n + \sum\limits_{k=1}^{M_k} y_n \leq A$

Полагаем N_1 наименьшее из чисел для которых $\sum\limits_{k=1}^{N_1} x_n > A$, потом в качестве M_1 берем наименьшее из чисел, для которого выполнено второе неравенство. Если уже определены N_k и M_k, то сначала определяем N_{k+1} как первое число для которого выполнено первое условие.

Тогда следующий ряд

$$x_1 + x_2 + \dots x_{N_1} + y_1 + \dots + y_{M_1} + x_{N_1+1} + \dots + x_{N_2} + y_{M_1+1} + \dots \tag{12.1}$$

является перестановкой исходного и последовательность частичных сумм s_k первых $N_k + M_k$ членов этого ряда не превосходя A отличается от него меньше чем на y_{M_k}. С другой стороны последовательность S_k сумм первых $N_{k+1} + M_k$ превосходя A отличается от него не более чем на $x_{N_{k+1}}$. А так как все члены переставленного ряда с номерами из промежутка $[N_k + M_k, N_{k+1} + M_k]$ положительны, то его частичные суммы для этого промежутка зажаты между s_k и S_k и отличаются от A меньше чем на максимум из x_{N_k} и y_{M_k}.

Аналогичные оценки справедливы и для промежутка $[N_{k+1}+M_k, N_{k+1}+M_{k+1}]$. Откуда видно, что разность между частичными суммами переставленного ряда и A стремится к нулю.

□

Теорема Лейбница. Многочисленные примеры условно сходящихся рядов, которые не являются абсолютно сходящимися дает следующая теорема.

Теорема 6 (Лейбниц). *Для любой стремящейся к нулю монотонной последовательности положительных чисел $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$, ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty}(-1)^k a_k$ сходится и имеет положительную сумму, меньшую a_0.*

Доказательство. Обозначим разность $a_k - a_{k+1}$ через Δa_k. Ряды $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\Delta a_{2k}$ и $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\Delta a_{2k+1}$ являются положительными и сходящимися, потому что их почленная сумма дает $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\Delta a_k = a_0$. Обозначим через S_n частичную сумму $\sum\limits_{k=1}^{n}(-1)^k a_k$. Тогда S_{2n+1} будет частичной суммой ряда $S = \sum\limits_{k=0}^{\infty}\Delta a_{2k}$, а S_{2n} — частичной суммой ряда $a_0 + \sum\limits_{k=0}^{\infty} -\Delta a_{2k+1} = S$, у которого все члены, кроме первого отрицательны. А поскольку частичная сумма положительного ряда не превосходит полной, а для отрицательного ряда неравенство меняется на противоположное, получаем такие неравенства $S_{2n+1} \le S \le S_{2n}$. Откуда и следует, что $\lim\limits_{n\to\infty} S_{2n} = \lim\limits_{n\to\infty} S_{2n+1} = \lim S_n = S$. Откуда

$$\sum_{k=0}^{\infty}\Delta a_{2k} = S = a_0 + \sum_{k=0}^{\infty} -\Delta a_{2k+1} = S$$

Из левого равенства очевидна положительность S, а из правого — неравенство $S < a_0$. □

Асимптотика гармонических чисел Сумма $\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$ называется n-ым *гармоническим числом* и обозначается H_n. Рассмотрим гиперболическую трапецию с основанием $[n, m]$, где n и m представляют собой натуральные числа. Тогда ее площадь (равная $\ln m/n$) заключена между площадями описанного мультипрямоугольника площади $\frac{1}{n-1} + \frac{1}{n} + \dots + \frac{1}{m-1} = {}_{m-1} - H_n$ и площадью вписанного мультипрямоугольника — $\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{m} = {}_m - H_{n-1}$.

Отсюда получаем такие неравенства

$$\frac{1}{n} \leq (H_m - H_n) - \ln m/n \leq \frac{1}{m} \tag{12.2}$$

Альтернированный гармонический ряд. Применим формулу (12.2) для вычисления суммы *альтернированного гармонического ряда*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \dots \tag{12.3}$$

Сходимость этого ряда вытекает из теоремы Лейбница. Пусть $S_{2n} = \sum\limits_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$. Тогда $S_{2n} = H'_{2n} - H''_{2n}$, где $H'_{2n} = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{2k-1}$ и $H''_{2n} = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{2k}$. Так как $H''_{2n} = \frac{1}{2}H_n$, то

$$H'_{2n} = H_{2n} - \frac{1}{2}H_n \tag{12.4}$$

в результате получаем

$$S_{2n} = H_{2n} - \frac{1}{2}H_n - \frac{1}{2}H_n = H_{2n} - H_n = \ln 2 + \delta_n, \tag{12.5}$$

где $\delta_n \to 0$ в силу неравенства (12.2).

Теперь мы видим, что сумма ряда равна $\lim\limits_{n\to\infty} S_{2n} = \ln 2$.

Суммирование переставленных рядов Ряд, полученный из альтернированного гармонического перестановкой типа $(++-)$ имеет вид

$$\left(1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{6}\right) \dots \tag{12.6}$$

Для определения его суммы сравним частичную сумму первых $6n$ членов этого ряда с суммой первых $6n$ членов альтернированного гармонического ряда для нечетного n. Разность этих величин будет равна разности двух сумм: уменьшаемое - сумма дробей с нечетными знаменателями от $\frac{1}{3n}$ до $\frac{1}{8n+1}$ и вычитаемое - сумма дробей с четными знаменателями от $\frac{1}{2n}$ до $\frac{1}{6n}$. Уменьшаемое стремится к $\frac{\ln 8/3}{2}$, а вычитаемое — к $\frac{\ln 3}{2}$. Поэтому разность стремится к $\frac{\ln 2}{2}$.

Задачи.

1. Доказать, что сходимость знакопостоянной блокировки равносильна сходимости исходного ряда.

2. Доказать сходимость ряда Принсгейма $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (-1)^{[\sqrt{k}]} \frac{1}{k}$

3. Определить разность между суммами ряда Лейбница $\frac{1}{-}\frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots$ и его перестановки типа $(++-)$.

13 Ряды и квадратуры.

Квадратура парабол Вычисление площади под параболой (точнее параболического сегмента) явилось одним из наиболее замечательных результатов Архимеда и всей античной математики. Площадь под графиком любого многочлена в семнадцатом веке разными методами нашли Кавальери и Ферма.

Опираясь на разработанную выше теорию суммирования, это нетрудно сделать. А именно, пусть $f(x)$ — монотонно возрастающая положительная функция на отрезке $[0, a]$, тогда площадь S под графиком этой функции, заключена между двумя суммами

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{a}{n} f\left(\frac{ak}{n}\right) \leq S \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{a}{n} f\left(\frac{ak}{n}\right) \tag{13.1}$$

Разница между которыми стремится к нулю при $n \to \infty$. Поэтому стремится к нулю и разность между любой из этих сумм и площадью под графиком. Поэтому вычислять площадь можно предельным переходом с помощью любой из сумм.

В частности, если $f(x) = x^m$, то площадь под графиком функции выражается пределом

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{a^{m+1}k^m}{n^{m+1}} = \frac{a^{m+1}}{n^{m+1}} \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n-1} k^m, \tag{13.2}$$

вычисление которого основано на следующей лемме.

Лемма 13.1. *Для любого натурального m имеет место равенство*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^{m+1}} \sum_{k=1}^{n} k^m = \frac{1}{m+1}$$

Доказательство. Разность $x^m - x^{\underline{m}}$ является многочленом степени $< m$. Поэтому $x^m = x^{\underline{m}} + \sum\limits_{k=1}^{m} a_k x^{\underline{k}}$, где значения a_k, как мы увидим, не влияют на ответ. Таким образом x^m является разностью следующего выражения

$$\frac{x^{\underline{m+1}}}{m+1} + \sum_{k=1}^{m} a_k \frac{x^{\underline{k+1}}}{k+1} \tag{13.3}$$

Поэтому формула для суммы m-ых степеней имеет вид

$$\sum_{k=1}^{n} k^m = \frac{n^{\underline{m+1}}}{m+1} + \sum_{k=1}^{m} a_k \frac{n^{\underline{k+1}}}{k+1} \tag{13.4}$$

Если получившееся выражение поделить на n^{m+1}, то первое слагаемое при $n \to \infty$ даст $\frac{1}{m+1}$, потому что, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^{\underline{m}}}{n^m} = 1$, а остальные слагаемые бесконечно малы. $\square$

В результате мы получаем

Теорема 1 (Ферма, Кавальери). *Для любого натурального m площадь между отрезком $[0, a]$ и параболой x^m равна $\frac{a^{m+1}}{m+1}$.*

Квадратура многочленов. В случае, когда функция $f(x)$ является многочленом, сумма (13.1) распадается на сумму сумм одночленов, поэтому итоговый результат выглядит для многочлена $\sum\limits_{k=0}^{N} a_k x^k$ как

$$\sum_{k=0}^{N} a_k \frac{x^{k+1}}{k+1} \tag{13.5}$$

Основываясь на этом соображении, Ферма сумел решить вопрос о нахождении площади под графиком для любого многочлена $a_0+a_1x+a_2x^2+\dots a_nx^n$. Ответ на этот вопрос оказался следующим: площадь под графиком многочлена над отрезком $[0, B]$ выражается следующей формулой:

$$\sum_{k=0}^{n} a_k \frac{B^{k+1}}{k+1} \tag{13.6}$$

В случае, если многочлен принимает на рассматриваемом промежутке отрицательные значения, то данная формула дает отрицательное число, по абсолютной величине равное площади заключенной между этим промежутком оси абсцисс и расположенным ниже графиком функции. Если же многочлен на рассматриваемом отрезке $[0, B]$ несколько раз меняет знак, то формула (13.6) дает разность между площадью, заключенной между графиком многочлена и осью абсцисс, там где многочлен положителен и площадью, заключенной между осью абсцисс и графиком многочлена там, где последний отрицателен.

Ряд Меркатора. При положительном x геометрический ряд $1-x+x^2-x^3+\dots$ имеет частичные суммы вида $\frac{1-(-1)^n x^n}{1+x}$, которые поочередно то превышают (при четном n), то уступают его полной сумме, то есть при любом $x > 0$ имеют место неравенства

$$1 - x + x^2 - x^3 + \dots - x^{2n-1} \le \frac{1}{1+x} \le 1 - x + x^2 - x^3 + \dots + x^{2n} \tag{13.7}$$

Рассмотрим теперь промежуток $[0, A]$. Кривая $y = \frac{1}{1+x}$ является сдвинутой на единицу влево гиперболой $y = \frac{1}{x}$. Поэтому площадь под ней над отрезком $[0, A]$ равна $\ln(1 + A)$. Многочлен из левой части (13.7) имеет площадь под графиком равную $\sum\limits_{k=1}^{2n} (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k}$, а многочлен в правой части равную $\sum\limits_{k=1}^{2n} (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k}$. Так как график первого лежит ниже гиперболы, а график второго выше, то в результате получаем такие неравенства:

$$A - \frac{A^2}{2} + \frac{A^3}{3} - \dots - \frac{A^{2n}}{2n} \le \ln(1 + A) \le A - \frac{A^2}{2} + \frac{A^3}{3} - \dots + \frac{A^{2n+1}}{2n+1} \tag{13.8}$$

Из левого неравенства заключаем $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}A^k}{k} = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \left(\frac{A^{2k-1}}{2k-1} - \frac{A^{2k}}{2k}\right) \le \ln(1+A)$ (так как все скобки положительны). Из правого неравенства $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \left(\frac{A^{2k}}{2k} - \frac{A^{2k+1}}{2k+1} -\right) \le A - \ln(1+A)$, откуда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}A^k}{k} \ge \ln(1 + A)$.

Таким образом доказана следующая теорема.

Теорема 2 (Mercator,1668). *Для любого* $x \in (0,1)$ *справедливо равенство*

$$\boxed{\log(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} x^k}{k}} \tag{13.9}$$

Вычисления логарифмов Результат Меркатора вызвал революцию, резко сократив количество труда необходимого для вычисления логарифмов. Но ряд Меркатора сходится медленно, поэтому на практике существенно более употребим следующий *Ряд Грегори*, получаемый как среднее арифметическое рядов Меркатора для x и $-x$:

$$\boxed{\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x} = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \dots} \tag{13.10}$$

Ряд Грегори сходится существенно быстрее ряда Меркатора. Полагая $x = \frac{1}{3}$ в (13.10) получаем

$$\ln 2 = \frac{2}{3} + \frac{2}{3\cdot 3^3} + \frac{2}{5\cdot 3^5} + \frac{2}{7\cdot 3^7} + \dots.$$

Натуральный логарифм двух вычисляется с помощью ряда Грегори. Имея вычисленным логарифм двух, вычислять логарифм трех можно уже по разному. Например, с помощью ряда Грегори, опираясь на формулу

$$\ln 3 = \ln 2 + \ln\frac{3}{2} = \ln 2 + \ln\frac{1+\frac{1}{5}}{1-\frac{1}{5}}.$$

Другая возможность возникает из

$$\ln 3 = 2\ln 2 - \ln\frac{1+\frac{1}{7}}{1-\frac{1}{7}}$$

Еще лучше использовать среднее геометрическое вышеприведенных выражений $3 = \sqrt{\frac{9}{8}}\sqrt{8}$ это дает

$$\ln 3 = \frac{3}{2}\ln 2 + \frac{1}{2}\ln\frac{1+\frac{1}{17}}{1-\frac{1}{17}}$$

Подставляя в ряд Меркатора $-x$ вместо x и вычитая из (**??**), получаем ряд Грегори:

$$\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} \tag{13.11}$$

Метод Эйлера разложения логарифма в степенной ряд. Так как при любом n имеет место равенство $\ln(1+x) = n\ln(1+x)^{\frac{1}{n}}$, а величина логарифма величины, отличающейся от единицы на бесконечно-малую, равна этой бесконечно-малой, то для бесконечно-большого ω, основываясь на биномиальном ряде, можно написать равенства:

$$\ln(1+x) = \omega((1+x)^{\frac{1}{\omega}} - 1) = \omega\left(\frac{x}{\omega} - \frac{x^2}{2} + \dots + \frac{1}{\omega}\underline{k}\frac{x^k}{k!} + \dots\right)$$

Так как при бесконечно большом ω имеет место равенство $\omega\frac{1}{\omega}\underline{k} = 1\cdot(-1)\cdot(-2)\dots(-k+1) = (-1)^{k-1}(k-1)!$), то ряд в правой части при бесконечно большом ω превращается в ряд Меркатора.

Задачи.

1. Суммировать ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{x^n}{n(n+1)}$
2. Придумать эффективный способ вычисления $\ln 5$ и $\ln 7$, если $\ln 2$ и $\ln 3$ считаются известными.
3. Доказать, что $1 - \left(x+\frac{1}{2}\right)\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{3(2x+1)^2} + \frac{1}{5(2x+1)^4} + \frac{1}{7(2x+1)^6}\cdots$

14 Степенные ряды.

В сегодняшней лекции мы на примере логарифма покажем, что полученные для функций вещественного переменного разложения в степенные ряды автоматически оказываются справедливыми и для комплексного переменного. Ключевую роль здесь играет, так называемая *теорема единственности*, с изложения которой мы и начнем наши рассмотрения.

Теорема единственности. Доказательство Эйлера. "Здесь может возникнуть такое сомнение. Если два ряда между собой равны

$$A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + \dots = A' + B'z + C'z^2 + D'z^3 + \dots,$$

то следует ли отсюда неизбежно равенство между собой коэффициентов одинаковых степеней z ; т. е. Будет ли $A = A', B = B', C = C', \dots$. Это сомнение легко устранится, если мы примем во внимание, что это равенство должно существовать, какое бы значение ни получило переменное z. Если $z = 0$, то ясно, что $A = A'$. Отняв от обеих частей эти равные члены и разделив оставшееся уравнение на z, получим

$$B + Cz + Dz^2 + \dots = B'z + C'z + D'z^2 + \dots,$$

откуда следует $B = B'$; подобным же образом покажем, что $C = C'$ и т.д. до бесконечности."

Чтобы продемонстрировать слабость доказательства Эйлера рассмотрим следующий степенной ряд: $\sum\limits_{k=0}^{\infty} (-1)^k k! x^k$. Какую функцию он представляет? Этот ряд расходится при любом $x \neq 0$. А при $x = 0$ имеет значение единица. Если считать, что он представляет функцию тождественно равную единице, то он опровергает теорему единственности. На самом деле этот ряд, как выяснил сам Эйлер, представляет функцию

$$f(x) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{-\tau}}{1 + x\tau}\, d\tau \qquad (14.1)$$

Круг сходимости степенного ряда. Строгое доказательство (и формулировка) теоремы единственности касается рядов, сходящихся по крайней мере в паре различных точек.

Сумма степенного ряда $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ с положительными коэффициентами монотонно возрастает, при увеличении x, если $x > 0$. Поэтому для любого степенного ряда $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$ определяется такое число R, называемое его *радиусом сходимости*, что $\sum\limits_{k=0}^{\infty} |a_k||z - z_0|^k < \infty$ при $|z - z_0| < R$ и $\sum\limits_{k=0}^{\infty} |a_k||z - z_0|^k = \infty$ при $|z - z_0| > R$.

Круг в комплексной плоскости с центром z_0 радиуса R называется *кругом сходимости* этого степенного ряда.

Для z из внутренности круга сходимости степенной ряд абсолютно сходится. За пределами круга сходимости степенной ряд не является абсолютно сходящимся, более того, нетрудно доказать, что он не будет и условно сходящимся и его члены будут неограничены по абсолютной величине. То есть за пределами круга сходимости степенной ряд расходится в сильном смысле.

Изолированность нуля

Лемма 14.1. *Если степенной ряд $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ имеет ненулевой радиус сходимости, то его сумма ограничена в любом круге меньшего радиуса.*

Доказательство. Пусть R является радиусом сходимости ряда $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ и пусть $r < R$. Тогда $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k| r^k = S(r) < \infty$. Для любого z по модулю не превосходящего r имеем

$$\left|\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k\right| \leq \sum_{k=0}^{\infty} |a_k||z^k| \leq \sum_{k=0}^{\infty} |a_k| r^k = S(r)$$

□

Лемма 14.2. *Если степенной ряд $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ имеет ненулевой радиус сходимости и хотя бы один отличный от нуля коэффициент, то найдется такое $\varepsilon > 0$, что сумма этого ряда отлична от нуля в проколотой ε-окрестности нуля.*

Доказательство. Пусть $r > 0$ таково, что $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k| r^k = S(r) < \infty$. Пусть n — номер наименьшего отличного от нуля коэффициента ряда. Тогда

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} |a_k| r^{k-n} = (S(r) - |a_n|)/r^n < \infty.$$

Теперь искомое ε можно определить так, чтобы $\varepsilon^n (S(r) - |a_n|)/r^n < |a_n|$.

Тогда сумма исходного ряда представляется в виде произведения

$$z^n \sum_{k=n}^{\infty} a_k z^{k-n},$$

в котором оба множителя отличны от нуля. □

Из доказанных лемм непосредственно вытекает следующая теорема

Теорема 1 (единственности). *Если два степенных ряда с ненулевыми радиусами сходимости принимают одинаковые значения на элементах сходящейся к нулю последовательности, то эти ряды совпадают (то есть имеют одинаковые члены).*

О суперпозиции степенных рядов.

Теорема 2. *Если* $R = \sum_{k=0}^{\infty} |b_k| r^k$ *меньше радиуса сходимости ряда* $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$, *то композиция* $f(g(z))$, *где* $g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k z^k$, *представляется степенным рядом с радиусом сходимости не меньшим* r.

Доказательство. Набор неотрицательных целых чисел $\{j_1 \dots j_n\}$ мы будем обозначать прописной латинской буквой J и называть n его *длиной* и обозначать $\#J = n$ а $j_1+j_2+\dots+j_n$ его *весом* и обозначать $|J| = j_1+j_2+\dots+j_n$.

Обозначим через $\mathbb{Z}^k$ множество всевозможных наборов неотрицательных целых чисел $\{j_1, j_2, \dots, j_k\}$ длины k и через $\mathbb{Z}^*$ объединение $\cup_{k=1}^{\infty} \mathbb{Z}^k$

Для набора $J = \{j_1 \dots j_k\}$ мы будем обозначать через b_J произведение $b_{j_1} b_{j_2} \dots b_{j_k}$.

По теореме о прямом произведении n-ая степень ряда $\sum_{k=0}^{\infty} |b_k| r^k$ представляется массивом

$$\sum_{J \in \mathbb{Z}^k} r^{|J|} b_J = R^n \tag{14.2}$$

По теореме об объединении массивов

$$\sum_{J \in \mathbb{Z}^*} |a_{\#J}| r^{|J|} b_J = \sum_{k=1}^{\infty} |a_k| R^k < \infty. \tag{14.3}$$

Таким образом при $|z| < r$ абсолютно суммируемым является массив

$$\sum_{J \in \mathbb{Z}^{\infty}} a_{\#J} z^{|J|} b_J, \tag{14.4}$$

суммой которого служит $f(g(z)) - a_0$.

Поэтому после перегуппировки мы можем получить абсолютно сходящийся степенной ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} z^k \sum_{|J|=k} a_{\#J} z^{|J|} b_J$$

представляющий $f(g(z)) - a_0$, коэффициенты которого представляют конечные суммы. □

Комплексный логарифм Функция $\exp z$ имеет период $2\pi i$, поэтому обратная к ней логарифмическая функция многозначна. Эта многозначная функция обозначается $\operatorname{Log} z$ и выражается через многозначную функцию $\operatorname{Arg} z$ по формуле

$$\operatorname{Log} z = \ln |z| + i \operatorname{Arg} z,$$

равносильной формуле Эйлера. Однозначную функцию $\ln z$, называемую *главной ветвью* логарифма определяют только для комплексных чисел, не лежащих на вещественной отрицательной полуоси (неотрицательных) по формуле

$$\ln z = \ln |z| + i \arg z, \tag{14.5}$$

где $\arg z \in (-\pi, \pi)$ представляет собой главное значение аргумента.

Теорема 3. *Для любого комплексного* z *по модулю меньшего* $1 - e^{-\pi}$, *ряд в правой части* (15.1) *абсолютно сходится и справедливо равенство*

$$\ln(1+z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} z^k}{k}, \tag{14.6}$$

Доказательство. Абсолютная сходимость ряда (15.1) вытекает из его сравнения с геометрическим $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |z|^k$.

Докажем теперь, что экспонента суммы этого ряда равна $z+1$. Для доказательства обозначим через $m(z)$ функцию, представленную рядом (15.1). Рассмотрим композицию $\exp(m(z))$. Так как экспоненциальный ряд имеет бесконечный радиус сходимости, то эта композиция имеет радиус сходимости не меньше единицы (радиуса сходимости ряда Меркатора). Для положительных z равенство $\exp(m(z)) = 1 + z$ доказано на прошлой лекции. Следовательно, по теореме единственности, мы можем заключить, что степенной ряд, представляющий композицию, имеет вид $1 + z$ и потому равенство $\exp(m(z)) = 1 + z$ выполнено для всех z из круга сходимости ряда Меркатора.

Для завершения доказательства нужно убедиться, что мнимая часть суммы $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} z^k}{k}$ по абсолютной величине не превосходит π.

Легко получить следующее неравенство:

$$\left| \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} z^k}{k} \right| \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|z|^k}{k} = -\ln(1 - |z|),$$

благодаря которому можно гарантировать справедливость равенства (15.1) при $1 - |z| \geq e^{-\pi}$. □

Подставляя в ряд Меркатора $-z$ вместо z и вычитая из (**??**), получаем комплексный ряд Грегори:

$$\frac{1}{2} \ln \frac{1+z}{1-z} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k+1}}{2k+1} \tag{14.7}$$

В частности, для чисто мнимого $z = ix$, имеем $\left| \frac{1+ix}{1-ix} \right| = 1$ и $\arg \frac{1+ix}{1-ix} = 2 \operatorname{arctg} x$. Откуда следует такое представление арктангенса степенным рядом:

$$\boxed{\operatorname{arctg} x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1}} \tag{14.8}$$

Подставляя в полученную формулу $x = \pi/4$, мы получаем следующий замечательный результат Лейбница:

$$\boxed{\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \dots} \tag{14.9}$$

Однако доказанная теорема не позволяет получить этот результат, потому что доказана лишь при условии $|z| < 1 - e^{-\pi}$. Ослабить это ограничение до $|z| < 1$ и получить результат Лейбница мы сможем на следующей лекции.

Задачи.

1. Доказать $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{\cos k\varphi}{k} = -\ln|2\sin\frac{\varphi}{2}|$, $(0 < |\varphi| \leq \pi)$
2. Доказать $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{\sin k\varphi}{k} = \frac{\pi - \varphi}{2}$, $(0 < \varphi < 2\pi)$
3. Доказать теорему Абеля для знакопеременного ряда типа Лейбница
4. Из теоремы единственности вывести, что любая тригонометрическая формула, справедливая для вещественных функций справедлива и для комплексной переменной.

15 Непрерывность.

Вводимое в сегодняшней лекции фундаментальное понятие непрерывности позволит нам существенно усилить результаты предыдущей лекции.

Непрерывной называется функция, если любому бесконечно-малому изменению аргумента, соответствует бесконечно-малое изменение функции.

Конкретнее, функция $f(x)$ называется *непрерывной в точке* x, если для любой бесконечно-малой последовательности δx_n бесконечно-малой является последовательность $f(x) - f(x + \delta x_n)$.

Функция, непрерывная во всех точках отрезка, называется непрерывной на отрезке.

Лемма 15.1. *Функция $f(x)$ непрерывна в точке a в том и только том случае, когда $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.*

Эта очевидная лемма позволяет легко доказать следующие свойства непрерывных функций. Мы оставляем это читателю в виде упражнения.

Теорема 1. *Сумма, произведение и композиция непрерывных функций непрерывны.*

Теорема 2 (Больцано-Коши). *Если непрерывная на отрезке $[a, b]$ функция $f(x)$ принимает на его концах значения разных знаков: $f(a)f(b) < 0$, то $f(x)$ обращается в ноль на интервале (a, b).*

Доказательство. Построим по индукции последовательность вложенных отрезков $[a_n, b_n]$ таких что, $f(a_n)f(b_n) < 0$ и $b_n - a_n = (b - a)/2^n$. Шаг индукции заключается в делении отрезка пополам и выборе той из половин на которой функция в концах принимает значения разных знаков. Пусть c общая точка этих отрезков, тогда $f^2(c) = \lim f(a_n)f(b_n) \leq 0$. откуда $f(c) = 0$ □

Теорема 3 (о монотонной функции). *Для строго монотонной функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ следующие два условия эквивалентны $f([a, b]) = [f(a), f(b)]$ f непрерывна на $[a, b]$.*

Доказательство. Если $f([a, b]) = [f(a), f(b)]$ и f строго монотонна, то для нее определена обратная функция $g(x)$. Предположим для определенности, что f возрастающая функция. Тогда и g будет возрастающей. Рассмотрим монотонно возрастающую последовательность $x_n \to x \in [a, b]$. Тогда последовательность $\{f(x_n)\}$ монотонно возрастает и ограничена сверху числом $f(x)$. Поэтому существует предел $y = \lim f(x)_n \leq f(x)$. Так как $f(x_n)$ возрастает, то $y > f(x_n)$ при любом n. В таком случае при любом n имеем неравенства $x_n = g(f(x_n)) < g(y) \leq g(f(x)) = x$, переход в пределу в которых дает $y = f(x)$. В силу леммы **??** отсюда следует непрерывность функции. Аналогично рассматривается случай убывающей последовательности, что и доказывает непрерывность $f(x)$.

В другую сторону утверждение теоремы следует из более общей теоремы о промежуточных значениях. □

Следствие 4. *Функция на отрезке обратная к непрерывной, сама непрерывна*

Из доказанных теорем вытекает непрерывность всех элементарных функций.

Непрерывность степенных рядов.

Теорема 5. *Функция, задаваемая суммой ряда непрерывных в некотором круге функций* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k(z)$, *непрерывна в этом круге, если этот ряд мажорируется сходящимся числовым рядом* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} M_k$.

Доказательство. Пусть z_0 принадлежит рассматриваемому кругу и $\Delta z_n \to 0$. Нам нужно доказать, что бесконечно-малой является последовательность разностей $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k(z_0) - \sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k(z_0 + \Delta z_n)$, которая есть сумма ряда бесконечно-малых последовательностей $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (f_k(z_0) - f_k(z_0 + \Delta z_n)$. Так как сумма максимум модуля k-ой последовательности не превосходит $2M_k$, и $\sum\limits_{k=1}^{\infty} M_k < \infty$, то нужное нам заключение вытекает из теоремы Вейерштрасса. □

Теорема 6. *Функция, задаваемая степенным рядом, непрерывна внутри круга сходимости.*

Доказательство. Пусть z_0 принадлежит кругу сходимости ряда $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ тогда для некоторого $r > |z_0|$ сходится ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} |a_k| r^k$, мажорирующий степенной ряд в круге радиуса r. Поэтому непрерывность суммы степеного ряда следует из предыдущей теоремы. □

Применение к логарифму. Развитая теория позволяет доказать справедливость равенства

$$\ln(1+z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} z^k}{k}, \tag{15.1}$$

для любого z по модулю меньшего единицы. А именно, подставим tz вместо z в левую и правую части равенства и рассмотрим как функцию от вещественного параметра t разность левой и правой части. Эта разность непрерывно зависит от t при фиксированном z, так как $\arg z$ непрерывен при неотрицательном z отличном от нуля, поэтому непрерывен $\ln(1+tz)$. А правая часть непрерывна как степенной ряд в круге сходимости. Эта разность равна нулю при $t = 0$ и принимает значения вида $2\pi i k$. По теореме о промежуточных значениях эта разность вынуждена быть постоянной. В частности, она равна нулю для $t = 1$, что и доказывает равенство (15.1).

Теорема Абеля. Более того, функция, задаваемая степенным рядом, в некоторых случаях оказывается непрерывной и на границе круга сходимости.

Теорема 7 (Абель). *Если ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ *сходится, то* $\lim\limits_{x \to 1-0} a_k x^k = \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$.

Условия $x \to x_0 + 0$ и $x \to x_0 + 0$ означают, что $x > x_0$ или $x < x_0$ соответственно.

Для абсолютно сходящегося ряда это получается из теоремы Вейерштрасса, потому что отклонение последовательности ax^n от ее предела a не превосходит a.

Для условно сходящегося ряда расстановкой скобок сделаем из него абсолютно сходящийся и оценим отклонение скобки на основании следующей леммы

Лемма 15.2. *Отклонение многочлена* $\sum\limits_{k=0}^{n} a_k x^k$ *от суммы его коэффициентов на отрезке* $[0,1]$ *не превосходит максимума модулей сумм* $A_m = \sum\limits_{k=m}^{n} a_k$.

Доказательство. Отклонение многочлена от суммы его коэффициентов выражается формулой

$$\sum_{k=0}^{n} a_k(1-x^k) = (1-x)\sum_{k=1}^{n} a_k(1+x+\cdots+x^{k-1}) \tag{15.2}$$

Приведение подобных членов в выражении справа дает

$$(1-x)\sum_{k=0}^{n-1} A_k x^k, \tag{15.3}$$

что по абсолютной величине не превосходит

$$(1-x)\max_k |A_k| \sum_{k=0}^{n-1} x^k \le \max_k |A_k| \tag{15.4}$$

□

Доказательство теоремы Абеля. Так как ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$ условно сходится, последовательность его частичных сумм A_n ограничена некоторым числом A. Тогда любая отрезочная сумма $A_{n,m} = \sum\limits_{k=n}^{m-1} a_k$ этого ряда не превосходит по абсолютной величине $2A$.

Пусть последовательность натуральных чисел $\{n_k\}$ такова что последовательность A_{n_k} монотонна. В таком случае абсолютно сходится ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} A_{n_{k-1},n_k}$. Пусть $A_{n,m}(x) = \sum\limits_{k=n}^{m-1} a_k x^k$. Тогда $A_{n,m}(x) \to A_{n,m}$ при $x \to 1$ и лемма об отклонении многочлена позволяет доказать сходимость ряда отклонений. Откуда по теореме Вейерштрасса получаем

$$\lim_{x\to 1-0} \sum_{k=1}^{\infty} A_{n_k,n_{k+1}}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} A_{n_k,n_{k+1}}$$

А так как, с одной стороны, при любом $x < 1$ сходится (абсолютно) ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ сумма которого совпадает с $\sum\limits_{k=1}^{\infty} A_{n_k,n_{k+1}}(x)$, а с другой стороны $\sum\limits_{k=1}^{\infty} A_{n_k,n_{k+1}} = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$, то в результате мы получаем утверждение теоремы Абеля. □

Суммирование по частям. Рассмотрим две последовательности $\{a_k\}_{k=0}^n$, $\{b_k\}_{k=0}^n$. Разность их произведения $\Delta(a_k b_k) = a_{k+1}b_{k+1} - a_k b_k$ может быть представлена следующим образом:

$$\Delta(a_k b_k) = a_{k+1}\Delta b_k + b_k \Delta a_k \tag{15.5}$$

Суммирование этих равенств для $k \leq n$ дает

$$a_{n+1}b_{n+1} - a_0 b_0 = \sum_{k=0}^{n} a_{k+1}\Delta b_k + \sum_{k=0}^{n} b_k \Delta a_k \tag{15.6}$$

Этому равенству можно придать следующую форму, которая называется *формулой суммирования по частям*

$$\sum_{k=0}^{n} b_k \Delta a_k = a_{n+1}b_{n+1} - a_0 b_0 - \sum_{k=0}^{n} a_{k+1}\Delta b_k \tag{15.7}$$

Обозначим через $A_n = \sum\limits_{k=0}^{n-1} a_k$ $(A_0 = 0)$ и положим $b_{m+1} = b_m$. Тогда $\Delta A_n = a_n$ и суммирование по частям, с учетом равенств $A_0 = 0$, $b_{m+1} = b_m$, $\Delta b_m = 0$ дает

$$\sum_{k=0}^{m} a_k b_k = \sum_{k=0}^{m} b_k \Delta A_k = A_{m+1}b_m - \sum_{k=0}^{m-1} A_{k+1}\Delta b_k$$

В результате мы получаем такую формулу, которая называется *преобразованием Абеля*. Точнее правую часть нижеприведенного выражения называют преобразованием Абеля для суммы, стоящей в левой части

$$\sum_{k=0}^{m} a_k b_k = b_m \sum_{k=0}^{m} a_k - \sum_{k=0}^{m-1} \left(\Delta b_k \sum_{j=0}^{k} a_j \right) \tag{15.8}$$

Если все при любом $m \leq n$ выполнено неравенство $\left| \sum\limits_{k=0}^{m} a_k \right| \leq A$, а последовательность b_k положительна и монотонно убывает, преобразование Абеля суммы $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k b_k$ оценивается по модулю величиной $Ab_m + A(b_0 - b_m) = A(b_0 - b_m)$, откуда получаем *неравенство Абеля*

$$\left| \sum_{k=0}^{m} a_k b_k \right| \leq A|b_m - b_0| \tag{15.9}$$

Теорема 8 (Дирихле). *Если последовательность сумм* $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k$ *ограничена, а* $b_k \searrow 0$ *нисходит к нулю, то ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k b_k$ *сходится.*

Доказательство. Пусть $A_k = \sum\limits_{k=1}^{n-1} a_k$ и $|A_k| \leq A$ при любом k. Ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} A_{k+1}\Delta b_k$ абсолютно сходится, ибо почленно мажорируется положительным сходящимся рядом $\sum\limits_{k=1}^{\infty} A(-\Delta b_k)$.

Пусть $S = \sum\limits_{k=1}^{\infty} A_{k+1}(-\Delta b_k)$. Тогда разность между $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k b_k$ и частичной суммой $\sum\limits_{k=1}^{n-1} A_{k+1}(-\Delta b_k)$ в силу преобразования Абеля (15.8), равна $b_m A_{m+1}$. Откуда следует такое неравенство:

$$(15.10) \qquad |S - \sum_{k=1}^{n} a_k b_k| \leq A b_n + A \sum_{k=n+1}^{\infty} (-\Delta b_k) = A b_n + A b_{n+1} \leq 2 A b_n$$

Из этого неравенства видим, что частичные суммы ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k b_k$ с ростом числа слагаемых стремятся к S. $\square$

Наконец, мы готовы к доказательству самой сильной теоремы о ряде Меркатора.

Теорема 9. *Если* $|z| = 1$ *и* $z \neq 1$, *то* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k} = -\ln(1-z)$.

Доказательство. Любая сумма $\sum\limits_{k=0}^{n} z^k = \frac{1-z^{n+1}}{1-z}$ по модулю не превосходит $\frac{2}{|1-z|}$. Поэтому сходимость ряда

$$(15.11) \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{r^k z^k}{k}$$

при любом r следует из теоремы **8** (Дирихле) для $a_k = z^k$, $b_k = \frac{r^k}{k}$. Рассмотрим положительную последовательность $r_n \neq 1$. При $r = r_n$ сумма ряда (15.11) равна $\log(1 - r_n z)$. Так как последовательность $1 - r_n z$ сходится к $1 - z$, то последовательность логарифмов $\ln(1 - r_n z)$ сходится к $\ln(1-z)$. Но из теоремы **7** (Абеля) вытекает, что последовательность сумм рядов (15.11), когда r пробегает значения r_n сходится к $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k}$. Откуда заключаем, что $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k} = \ln(1-z)$. $\square$

Так как $\arg(1 + \cos\varphi + i\sin\varphi) = \operatorname{arctg} \frac{\sin\varphi}{1+\cos\varphi} = \operatorname{arctg} \operatorname{tg}(\varphi/2) = \frac{\varphi}{2}$, если $|\varphi| < \pi$, то подстановка $z = \cos\varphi + i\sin\varphi$ в ряд Меркатора $\ln(1 + \cos\varphi + i\sin\varphi) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{\cos k\varphi + i\sin k\varphi}{k}$ дает для мнимых частей следующее важное соотношение:

$$(15.12) \qquad \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{\sin k\varphi}{k} = \frac{\varphi}{2} \qquad (|\varphi| < \pi)$$

Задачи.

1. Если ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ сходится, а последовательность a_n монотонна и ограничена, то ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k b_k$ сходится (признак Абеля)

2. доказать, что многочлен $x^5 - 100x^2 + 44x - 10$ имеет корень

3. Доказать $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{\cos k\varphi}{k} = -\ln|2\sin\frac{\varphi}{2}|$, $(0 < |\varphi| \leq \pi)$

4. Доказать $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{\sin k\varphi}{k} = \frac{\pi - \varphi}{2}$, $(0 < \varphi < 2\pi)$

16 Разложение синуса в произведение

Гениальная идея, приведшая Эйлера к решению занимавшей его задачи о нахождении суммы ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$, заключалась во взгляде на синус как на многочлен бесконечной степени. Этот многочлен имеет корни во всех точках типа $k\pi$. Обычный многочлен разлагается в произведение линейных множителей, соответствующих его корням. По аналогии Эйлер предположил, что то же самое верно и для синуса. То есть синус с точностью до постоянного множителя равен произведению

$$\prod_{k=-\infty}^{\infty} (x - k\pi). \tag{16.1}$$

Написанное произведение расходится, но может быть сделано сходящимся посредством деления k-го множителя на $-k\pi$. А деление на константу не меняет корней.

Модифицированное произведение выглядит так

$$\prod_{k=-\infty}^{\infty} \left(1 - \frac{x}{k\pi}\right) = x \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{k^2\pi^2}\right). \tag{16.2}$$

Два многочлена с одинаковыми корнями могут различаться на мультипликативную константу. Так как $\sin x$ разлагается в степенной ряд, у которого коэффициент при x равен единице, а коэффициент при x у степенного ряда возникающего при перемножении произведения (16.2) также равен единице, то искомая мультипликативная константа также равна единице. То есть, естественно ожидать, что $\sin x$ совпадает с произведением (16.2). Эйлер выполнил также проверку, подставив $x = \pi/2$ ввиду того что $\sin \pi/2 = 1$ он получил из (16.2) знаменитое *произведение Валлисса*

$$\frac{\pi}{2} = \lim \frac{2n!!2n!!}{(2n-1)!!(2n+1)!!} = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{4n^2}{4n^2 - 1}, \tag{16.3}$$

Это рассуждение, однако, показалось Эйлеру недостаточно убедительным и вскоре он привел гораздо более подробное доказательство этой формулы.

Рассуждение Эйлера Эйлер начинает со следующего, известного нам, разложения на множители:

$$z^n - a^n = (z - a) \prod_{k=1}^{(n-1)/2} \left(z^2 - 2za \cos \frac{2k\pi}{n} + a^2\right) \tag{16.4}$$

Это разложение на множители может быть распространено и на бесконечные ряды. Поскольку

$$e^x - 1 = \left(1 + \frac{x}{\omega}\right)^{\omega} - 1$$

для бесконечнобольшого ω, постольку это выражение разлагается на множители вида

$$\left(1+\frac{x}{\omega}\right)^2-2\left(1+\frac{x}{\omega}\right)\cos\frac{2k}{\omega}\pi+1,$$

где k пробегает все натуральные числа и еще один множитель $\frac{x}{\omega}$, соответствующий $k=0$. Так как дуга $\frac{2k}{\omega}\pi$ бесконечномала, то

$$\cos\frac{2k}{\omega}\pi=1-\frac{2k^2}{\omega^2}\pi^2$$

В результате получаем e^x-1, кроме x имеет множители

$$\prod_{k=1}^{\omega/2}\left(1+\frac{x}{\omega}+\frac{x^2}{k^2\pi^2}\right)$$

Эти множитетели содержат бесконечномалую часть, которая при перемножении их всех производит член $\frac{x}{2}$ и потому не может быть отброшена. Во избежание этого неудобства рассмотрим выражение

$$e^x-e^{-x}=\left(1+\frac{x}{\omega}\right)^\omega-\left(1-\frac{x}{\omega}\right)^\omega$$

Типичный множитель этого выражения в силу (16.4) для $z=1-\frac{x}{\omega}$ $a=1+\frac{x}{\omega}$ будет иметь вид

$$a^2-2az\cos 2kn\pi+z^2=\frac{4x^2}{\omega^2}+\frac{4k^2}{\omega^2}\pi^2-\frac{4k\pi^2x^2}{\omega^4}$$

Итак, Функция e^x-e^{-x} будет делится на

$$\left(1+\frac{x^2}{k^2\pi^2}-\frac{x^2}{\omega^2}\right),$$

где член $\frac{x^2}{\omega^2}$ может быть опущен без опасения, потому что даже после умножения на ω он остается бесконечномалым. Кроме того как и раньше, если $k=0$, то первый множитель будет равен x. В результате получаем

$$\frac{e^x-e^{-x}}{2}=x\prod_{k=1}^{\infty}\left(1+\frac{x^2}{k^2\pi^2}\right) \tag{16.5}$$

Подставляя в полученную формулу ix, вместо x получаем

$$\boxed{\frac{\sin x}{x}=\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{k^2\pi^2}\right)} \tag{16.6}$$

Бесконечные произведения. Прежде, чем приступить к изложению современного доказательства мы должны аккуратно определить бесконечные произведения.

Бесконечное произведение $z_1z_2\dots z_k,\dots$ сокращенно обозначается $\prod\limits_{k=1}^{\infty}z_k$ и определяется как предел последовательности частичных произведений

$\lim\limits_{n\to\infty}\prod\limits_{k=1}^{n} z_k$, если последний существует и отличен от нуля. В этом случае произведение называется *сходящимся.* Если предел частичных произведений равен нулю, то произведение называется *расходящимся к нулю.*

Лемма 16.1. *Для любого комплексного z по модулю меньшего единицы справедливо неравенство* $|\ln(1+z)| \le \frac{|z|}{1-|z|}$.

Доказательство.

$$|\ln(1+z)| = \left|\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}z^k}{k}\right| \le \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|z|^k}{k} = \ln\left(\frac{1}{1-|z|}\right) = \ln\left(1+\frac{|z|}{1-|z|}\right)$$

□

Теорема 1. *Если* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |z_k| < \infty$, *то произведение* $\prod\limits_{k=1}^{\infty}(1+z_k)$ *сходится.*

Доказательство. Сходимость ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |z_k|$ влечет $\sum\limits_{k=n}^{\infty} |z_k| \to 0$ при $n \to \infty$. Выберем N столь большим, чтобы $\sum\limits_{k=N}^{\infty} |z_k| < \frac{1}{2}$. Так как при $|z| < \frac{1}{2}$ справедливы неравенства

$$|\arg(1+z)| \le |\ln(1+z)| \le \frac{|z|}{1-|z|} \le 2|z|, \tag{16.7}$$

то при $M > N$ произведение $\prod\limits_{k=N}^{M}(1+z_k)$, также как и $(1+z_{M+1})$ имеют аргументы в диапазоне $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, поэтому главные значения их логарифмов дают в сумме главное значение логарифма для произведения $\prod\limits_{k=N}^{M+1}(1+z_k)$. Следовательно, при любом $M > N$ справедливо равенство

$$\ln\prod_{k=N}^{M}(1+z_k) = \sum_{k=N}^{M}\ln(1+z_k) \tag{16.8}$$

В силу неравенств (16.7) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |\ln(1+z_k)| \le 2\sum\limits_{k=1}^{\infty} |z_k|$. Поэтому ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \ln(1+z_k)$ сходится, а значит сходится и последовательность логарифмов частичных произведений $\lim\limits_{M\to\infty} \ln\prod\limits_{k=1}^{M}(1+z_k)$. Доказательство завершается потенцированием:

$$\exp\left(\lim_{M\to\infty}\ln\prod_{k=1}^{M}(1+z_k)\right) = \lim_{M\to\infty}\exp\ln\prod_{k=1}^{M}(1+z_k) = \lim_{M\to\infty}\prod_{k=1}^{M}(1+z_k)$$

□

Доказательство с теорией пределов

Теорема 2. *Для любого комплексного z сходится бесконечное произведение* $\prod\limits_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{k^2\pi^2}\right)$ *сходится к* $\frac{\sin z}{z}$

Доказательство. Для любого натурального n, как было отмечено выше, имеет место равенство

$$z^n - a^n = (z-a)\prod_{k=1}^{(n-1)/2}\left(z^2 - 2az\cos\frac{2k\pi}{n} + a^2\right) \tag{16.9}$$

Подставляем в это равенство $z = (1+x/N)$, $a = (1-x/N)$ и полагаем $n = N$. В результате получаем

$$\begin{aligned}\left(1+\frac{x}{N}\right)^N - \left(1-\frac{x}{N}\right)^N &= \\ &= \frac{2x}{N}\prod_{k=1}^{(N-1)/2}\left(2+\frac{2x^2}{N^2} - 2\left(1-\frac{x^2}{N^2}\right)\cos\frac{2k\pi}{N}\right) = \\ &= \frac{2x}{N}\prod_{k=1}^{(N-1)/2}\left(2-2\cos\frac{2k\pi}{N}\right)\prod_{k=1}^{(N-1)/2}\left(1+\frac{x^2}{N^2}\cdot\frac{1+\cos(2k\pi/N)}{1-\cos(2k\pi/N)}\right)\end{aligned}$$

Переходя к половинным углам, последнее выражение можно представить в виде

$$\frac{2^{(N+1)/2}x}{N}\prod_{k=1}^{(N-1)/2}\sin^2\frac{k\pi}{N}\prod_{k=1}^{(N-1)/2}\left(1+\frac{x^2}{N^2}\operatorname{ctg}^2(k\pi/N)\right) \tag{16.10}$$

Так как коэффициент при x у получившегося выражения равен двум мы получаем

$$2 = \frac{2^{(N+1)/2}}{N}\prod_{k=1}^{(N-1)/2}\sin^2\frac{k\pi}{N} \tag{16.11}$$

В результате имеем

$$\left(1+\frac{x}{N}\right)^N - \left(1-\frac{x}{N}\right)^N = x\prod_{k=1}^{(N-1)/2}\left(1+\frac{x^2}{N^2}\operatorname{ctg}^2(k\pi/N)\right) \tag{16.12}$$

Теперь осталось проверить условия Вейерштрасса о возможности почленного перехода к пределу в вышеуказанном равенстве. Для этого достаточно доказать неравенство

$$\frac{x^2}{N^2}\operatorname{ctg}^2(k\pi/N) \le C\frac{x^2}{k^2}, \tag{16.13}$$

которое вытекает из неравенства Жордана

$$\sin x \ge \frac{2x}{\pi} \qquad \left(0 \le x \le \frac{\pi}{2}\right) \tag{16.14}$$

□

Суммирование ряда Эйлера В силу доказанной ниже теоремы (**3**) из доказанной формулы (16.6) вытекает, что $\sin x$ разлагается в степенной ряд, у которого коэффициент при x^3 равен $-\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2\pi^2}$. С другой стороны нам известно, что

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \dots$$

откуда следует

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Теорема 3. *Если* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |a_k| < \infty$, *то*

$$\prod_{k=1}^{\infty}(1+a_k) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k + \sum_{j\neq k}^{\infty} a_k a_j + \sum_{i\neq j\neq k}^{\infty} a_i a_j a_k + \dots \tag{16.15}$$

Доказательство. Для любого натурального n, очевидно, имеет место равенство

$$\prod_{k=1}^{n}(1+a_k) = 1 + \sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{j\neq k}^{n} a_k a_j + \sum_{i\neq j\neq k}^{n} a_i a_j a_k + \dots, \tag{16.16}$$

из которого предельным переходом при $n \to \infty$ получается требуемое. Нам нужно убедиться в законности почленного перехода к пределу для бесконечного ряда. По абсолютной величине значение k-го члена в сумме справа, очевидно, не превосходит

$$\sum_{i_1\neq i_2\neq\dots\neq i_k}^{\infty} |a_{i_1} a_{i_2} \dots a_{i_k}|$$

Поэтому нам достаточно убедиться в конечности суммы

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i_1\neq i_2\neq\dots\neq i_k}^{\infty} |a_{i_1} a_{i_2} \dots a_{i_k}| \tag{16.17}$$

Но при любых $n < m$ справедливы неравенства

$$\sum_{k=1}^{n} \sum_{i_1\neq i_2\neq\dots\neq i_k}^{m} |a_{i_1} a_{i_2} \dots a_{i_k}| \leq \prod_{k=1}^{\infty}(1+|a_k|) \tag{16.18}$$

Конечность произведения в правой части вытекает из теоремы (**1**). Переходя в неравенстве (16.18) к пределу сначала для $m \to \infty$, а потом для $n \to \infty$, мы получим, что (16.17) оценивается сверху произведением из (16.18). □

Задачи.

1. Найти произведение $\prod \left(1 - \frac{1}{9n^2}\right)$.

2. Доказать, что $\cos x = \prod\limits_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{4x^2}{(2n-1)^2\pi^2}\right)$
3. Найти произведение $\prod \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)$.
4. * Найти произведение $\prod \left(1 - \frac{18n^2+1}{(9n^2-1)^2}\right)$
5. Суммировать ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4}$
6. Доказать, что $\frac{1}{1-x} = \prod_{n=0}^{\infty} \left(1 + x^{2^n}\right)$
7. Доказать, что $\frac{\sin x}{x} = \prod_{n=1}^{\infty} \cos \frac{x}{2^n}$
8. Доказать, что $\frac{\operatorname{sh} x}{x} = \prod_{n=1}^{\infty} \operatorname{ch} \frac{x}{2^n}$
9. Доказать тождество Эйлера
10. Доказать расходимость ряда обратных простых чисел $\sum\limits_{p=2}^{\infty} \frac{1}{p}$ [p-prime].
11. Если бесконечное произведение комплексных чисел сходится, то сходится ряд главных значений логарифмов множителей.

17 Гамма функция.

Задача интерполяции факториалов была решена Эйлером, но еще до Эйлера Стирлинг фактически был вынужден найти $-0.5!$ для своей знаменитой асимптотической формулы.

Постоянная Эйлера. Ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k}-\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)\right) \tag{17.1}$$

абсолютно сходится. Действительно, в силу неравенств для логарифма имеем

$$\frac{1}{k}<\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)<\frac{1}{k+1}$$

Поэтому ряд (17.1) положителен и мажорируется положительным рядом $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k(k+1)}$, общий член которого можно представить в виде разности $\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}$. Поэтому

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k(k+1)}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}=\lim_{n\to\infty}(\frac{n}{n+1}=1$$

Сумма ряда (17.1) называется *постоянной Эйлера* и обозначается γ. Ее десятичное представление таково 0.5772156649....

Формальное телескопирование. Мы снова возвращаемся к задаче по данной функции $f(x)$ найти функцию $F(x)$, такую что $\Delta F=f$. В частности, для $f=0$ любая периодическая функция периода 1 будет решением. В общем случае к любому решению задачи можно добавить 1-периодическую функцию и опять получить решение. Формальное решение задачи дает такая формула

$$F(x)=-\sum_{k=0}^{\infty}f(x+k) \tag{17.2}$$

Телескопирование логарифма. Мы начнем с формального решения $-\sum\limits_{k=0}^{\infty}\ln(x+k)$. Чтобы уменьшить расходимость добавим почленно $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\ln k$. Получим $-\ln x-\sum\limits_{k=1}^{\infty}(\ln(x+k)-\ln k)=-\ln x-\sum\limits_{k=1}^{\infty}\ln(1+\frac{x}{k})$. Мы знаем, что $\ln(1+x)$ близок к x, но ряд все еще расходится. Теперь сходимость можно достичь, вычитая $\frac{x}{k}$ из k-го члена ряда. Это вычитание меняет разность. Посчитаем разность для $F(x)=-\ln x-\sum\limits_{k=1}^{\infty}(\ln(1+\frac{x}{k})-\frac{x}{k})$. Разность n-го члена ряда есть

$$\left(\ln\left(1+\frac{x+1}{k}\right)-\frac{x+1}{k}\right)-\left(\ln\left(1+\frac{x}{k}\right)-\frac{x}{k}\right)=$$
$$\left(\ln(x+k+1)-\ln k-\frac{x+1}{k}\right)-\left(\ln(x+k)-\ln k-\frac{x}{k}\right)=\Delta\ln(x+k)-\frac{1}{k}$$

Следовательно,

$$\Delta F(x) = -\Delta \ln x - \sum_{k=1}^{\infty}\left(\Delta \ln(x+k) - \frac{1}{k}\right) = \tag{17.3}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(-\Delta \ln x - \sum_{k=1}^{n}\left(\Delta \ln(x+k) - \frac{1}{k}\right)\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\ln x - \ln(n+x) + \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right) =$$

$$\ln x + \lim_{n\to\infty}(\ln(n) - \ln(n+x)) + \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \ln n\right) = \ln x + \gamma$$

В результате получается следующая формула для функции телескопирующей логарифм и называемой *логамма*:

$$\Lambda(x) = -\gamma x - \ln x - \sum_{k=1}^{\infty}\left(\ln\left(1+\frac{x}{k}\right) - \frac{x}{k}\right) \tag{17.4}$$

Теорема 1. *Ряд* (17.4) *абсолютно сходится для всех вещественных* x *за исключением отрицательных целых чисел. Он представляет функцию* $\Lambda(x)$ *такую что* $\Lambda(1) = 0$ *и* $\Delta\Lambda(x) = \ln x$.

Доказательство. Неравенство $\frac{x}{1+x} \le \ln(1+x) \le x$ влечет

$$|\ln(1+x) - x| \le \left|\frac{x}{1+x} - x\right| = \left|\frac{x^2}{1+x}\right|. \tag{17.5}$$

Через ε обозначим расстояние от x до ближайшего отрицательного числа. Тогда благодаря (17.5), ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \ln\left(\left(1+\frac{y}{k}\right) - \frac{y}{k}\right)$ почленно мажорируется сходящимся рядом $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{x^2}{\varepsilon k^2}$. Это доказывает абсолютную сходимость для (17.4).

Так как $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}(\ln(1+\frac{1}{k}) - \frac{1}{k}) = \lim\limits_{n\to\infty}(\ln n - \sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k}) = -\gamma$, то $\Lambda(1) = 0$. □

Выпуклые функции. Существует много функций, телескопирующих логарифм. Свойство, которое выделяет из них логамму Λ это выпуклость.

Следующая формула определяет так называемое *разностное отношение* функции f на интервале $[a, b]$

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} \tag{17.6}$$

Функция f называется *выпуклой* на некотором промежутке, если для любой тройки $x < y < z$ точек этого промежутка выполнено неравенство

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} \le \frac{f(z) - f(y)}{z - y} \tag{17.7}$$

Выпуклость линейной функции $ax + b$ следует из того, что ее разностное отношение постоянно и равно a.

Лемма 17.1. *Сумма (даже бесконечная) выпуклых функций выпукла.*

Доказательство. Это верно потому что разностное отношение суммы функций на $[a, b]$ равно сумме разностных отношений. $\square$

Лемма 17.2 (выпуклость логарифма). *Если $y > x$, то*

$$\frac{1}{x} \leq \frac{\ln y - \ln x}{y - x} \leq \frac{1}{y}$$

Доказательство. Поскольку $\ln y - \ln x = \ln(1 + (y - x)/x)$, то базовые оценки логарифма превращаются в следующие

$$\frac{y - x}{x} = \frac{(y - x)/x}{1 + (y - x)/x} \leq \ln y - \ln x = \ln(1 + (y - x)/x) \leq \frac{y - x}{y}$$

Деление на $y - x$ дает искомые неравенства. $\square$

Характеризационная теорема. Определим *восходящую факториальную степень* $x^{\overline{k}} = x(x + 1)(x + 2) \ldots (x + k - 1) = (x + k - 1)^{\underline{k}}$.

Теорема 2. $\Lambda(x)$ *является единственной выпуклой функцией телескопирующей* $\ln x$, *для которой* $\Lambda(1) = 1$.

Доказательство. Выпуклость Λ вытекает из выпуклости слагаемых ряда, ее представляющего.

Пусть $f(x)$ является выпуклой функцией телескопирующей логарифм. Рассмотрим $x \in (0, 1)$ и произвольное натуральное n. Если $f(1) = 0$, то $f(n) = \ln(n - 1)!$. Выпуклость f дает неравенства

$$\frac{f(-1 + n) - f(n)}{-1 + n - n} \leq \frac{f(x + n) - f(n)}{x + n - n} \leq \frac{f(1 + n) - f(n)}{1 + n - n}$$

Откуда, ввиду равенства $f(n) = \ln(n - 1)!$, получается

$$\ln(n - 1) \leq \frac{f(x + n) - f(n)}{x + n - n} \leq \ln n$$

Откуда получаем оценки для $f(x + n)$

$$\ln\left((n - 1)^x (n - 1)!\right) \leq f(x + n) \leq \ln\left(n^x (n - 1)!\right)$$

Так как $f(x + n) = f(x)x(x + 1) \ldots (x + n - 1) = f(x)x^{\overline{n}}$ получаем оценки для $f(x)$

$$\ln\left((n - 1)^x (n - 1)!\right) - \ln x^{\overline{n}} \leq f(x + n) \leq \ln\left(n^x (n - 1)!\right) - \ln x^{\overline{n}}$$

Так как последнее неравенство справедливо при любом n мы и в левой его части можем заменить n на $n + 1$. Мы получим тогда

$$\ln\left(n^x n!\right) - \ln x^{\overline{n+1}} \leq f(x) \leq \ln\left(n^x (n - 1)!\right) - \ln x^{\overline{n}}$$

Разность между левой и правой частями этого неравенства составляет $\ln(x + n) - \ln n = \ln(1 + \frac{x}{n})$. Мы видим, что разность стремиться к нулю. Поэтому левая и правая части имеют $\Lambda(x)$ в качестве общего предела. Следовательно, $f(x) = \Lambda(x)$ для x, из интервала $(0, 1)$, а потому и для всех x.

$\square$

В качестве побочного результата приведенного доказательства получается следующая формула

$$\boxed{\Gamma(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{n^x n!}{x(x+1)\dots(x+n)}} \tag{17.8}$$

Именно с помощью этой формулы Эйлер впервые определил гамма-функцию.

Гамма функция. Эйлерова *гамма функция* $\Gamma(x)$ определяется как $\exp(\Lambda(x))$, где $\Lambda(x)$ — построенная выше функция, телескопирующая логарифм. Потенцирование (17.4) дает представление гамма функции в так называемой *канонической форме Вейерштрасса*:

$$\Gamma(x) = \frac{e^{-\gamma x}}{x} \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{x}{k}\right)^{-1} e^{\frac{x}{k}} \tag{17.9}$$

Так как $\Delta \ln \Gamma(x) = \ln x$, получаем следующее функциональное уравнение гамма функции, называемое *формулой понижения*:

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x) \tag{17.10}$$

Так как $\Lambda(1) = 0$, согласно (**1**), по индукции на основе (17.10) получаем $\Gamma(n) = (n-1)!$.

Неотрицательная функция f называется *логарифмически выпуклой*, если $\log f(x)$ выпукла.

Теорема 3 (характеризационная). $\Gamma(x)$ *является единственной логарифмически выпуклой функцией, определенной для всех* $x > 0$, *которая удовлетворяет формуле понижения* $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ *и принимает в единице значение* 1.

Доказательство. Логарифмическая выпуклость $\Gamma(x)$ следует из выпуклости $\Lambda(x)$. Далее $\Gamma(1) = \exp \Lambda(1) = 1$. Если f является логарифмически выпуклой функцией, удовлетворяющей формуле понижения, то $\ln f$ удовлетворяет всем условиям теоремы **2**. Следовательно, $\ln f(x) = \Lambda(x)$ и $f(x) = \Gamma(x)$. □

Вычисление произведений. Из канонической формы Вейерштрасса вытекает

$$\prod_{n=1}^{\infty} \left\{ \left(1 - \frac{x}{n}\right) e^{\frac{x}{n}} \right\} = \frac{-e^{\gamma x}}{x\Gamma(-x)} \qquad \prod_{n=1}^{\infty} \left\{ \left(1 + \frac{x}{n}\right) e^{-\frac{x}{n}} \right\} = \frac{e^{-\gamma x}}{x\Gamma(x)} \tag{17.11}$$

Можно вычислить много произведений, расщепляя их на части, имеющие каноническую форму (17.11). Например, рассмотрим произведение $\prod\limits_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right)$.

По формуле разности квадратов преобразуем его к виду $\prod\limits_{k=1}^{\infty} (1 - \frac{x}{n})^{-1}(1 + \frac{x}{n})^{-1}$.

Вводя множители $e^{\frac{x}{n}}$ и $e^{-\frac{x}{n}}$, получаем каноническую форму

$$\prod_{n=1}^{\infty} \left\{ \left(1 - \frac{x}{n}\right) e^{\frac{x}{n}} \right\}^{-1} \prod_{n=1}^{\infty} \left\{ \left(1 + \frac{x}{n}\right) e^{-\frac{x}{n}} \right\}^{-1} \tag{17.12}$$

Теперь мы применяем (17.11). Первое произведение из (17.12) равняется $\frac{-e^{x\gamma}}{x\Gamma(-x)}$, а второе есть $\frac{e^{-x\gamma/2}}{x\Gamma(x)}$. С учетом того, что $-\frac{x}{\Gamma}(-x) = \Gamma(1-x)$, преобразуем (17.12) к виду

$$\frac{2}{x\Gamma(1-x)\Gamma(x)} \tag{17.13}$$

С другой стороны произведение $\prod\limits_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{4n^2}\right)$, как нам известно из предыдущей лекции равно $\frac{\pi}{\sin \pi x}$. Сравнивая полученные результаты, получаем *формулу дополнения* для гамма-функции:

$$\boxed{\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin \pi x}} \tag{17.14}$$

В частности, для $x = \frac{1}{2}$ эта формула позволяет заключить $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$.

Формула удвоения Лежандра. Пусть $G(x) = \Gamma\left(\frac{x+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{x}{2}\right)$. Тогда $G(x+1) = \Gamma\left(\frac{x+2}{2}\right)\Gamma\left(\frac{x+1}{2}\right) = \Gamma\left(\frac{x}{2}+1\right)\Gamma\left(\frac{x+1}{2}\right) = \frac{x}{2}\Gamma\left(\frac{x}{2}\right)\Gamma\left(\frac{x+1}{2}\right) = \frac{x}{2}G(x)$. Следовательно $G(x)2^x$ удовлетворяет функциональному уравнению гамма-функции.Так как $G(x)$ логарифмически выпукла, как произведение логарифмически выпуклых функций, то из характеризационной теоремы заключаем, что $G(x)/G(1)$ совпадает с гамма функцией, то есть $\frac{G(x)2^x}{G(1)2^1} = \Gamma(x)$. Меняя x на $2x$, и $\Gamma(\frac{1}{2})$ на $\sqrt{\pi}$ получаем

$$\boxed{\Gamma(2x) = \frac{2^{2x-1}\Gamma(x+\frac{1}{2})\Gamma(x)}{\sqrt{\pi}}} \tag{17.15}$$

Формула Стирлинга. Перемножение между собой неравенств

$$\left(1+\frac{1}{k}\right)^k < e < \left(1+\frac{1}{k}\right)^{k+1} \tag{17.16}$$

для $k = 1, 2, \ldots, n-1$ дает

$$\frac{n^{n-1}}{(n-1)!} < e^{n-1} < \frac{n^n}{(n-1)!} \tag{17.17}$$

Откуда видно, что по порядку роста гамма-функция заключена между $n^{n-1}e^{-n}$ и $n^n e^{-n}$. Это наводит на мысль предположить, что

$$\Gamma(x) = cx^{x-\frac{1}{2}}e^{-x+\alpha(x)}, \tag{17.18}$$

где $\alpha(x)$ стремится к нулю при $x \to \infty$. Для определения постоянной c воспользуемся формулой удвоения. С одной стороны $\Gamma(2x)$ определяется подстановкой $2x$ вместо x в формулу (17.18):

$$\Gamma(2x) = c(2x)^{2x-\frac{1}{2}}e^{-2x+\alpha(2x)} \tag{17.19}$$

С другой стороны, формула удвоения позволяет выразить $\Gamma(2x)$ через произведение $\Gamma(x)\Gamma(x+\frac{1}{2})$, сомножители которого выражаются посредством (17.18):

$$\Gamma(2x) = \frac{2^{2x-1}}{\sqrt{\pi}}(cx^{x-\frac{1}{2}}e^{-x+\alpha(x)})(c\left(x+\frac{1}{2}\right)^x e^{-x-\frac{1}{2}+\alpha(x+\frac{1}{2})}) \tag{17.20}$$

Отношение правых частей (17.20) к (17.19) при $x \to \infty$ должно стремиться к единице. Если же в числителе заменить $(x+\frac{1}{2})^x = x^x(1+\frac{1}{2x})^x$ на $x^x e^{\frac{1}{2}+\beta(x)}$, где $\beta(x) \to 0$ при $x \to \infty$, то в результате сокращений мы получим:

$$1 = \lim_{x\to\infty} \frac{c}{\sqrt{2}\sqrt{\pi}} e^{\alpha(x)+\alpha(x+\frac{1}{2})+\beta(x)-\alpha(2x)} \tag{17.21}$$

Так как все величины в показателе экспоненты бесконечно-малы, то мы получаем $c = \sqrt{2\pi}$ и приходим к знаменитой формуле Стирлинга

$$\boxed{n! \simeq \sqrt{2\pi n} n^n e^{-n}} \tag{17.22}$$

Задачи.

1. Выразить произведение через гамма функцию $\prod\limits_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{x}{n}\right)\left(1+\frac{2x}{n}\right)\left(1-\frac{3x}{n}\right)$
2. Выразить произведение через гамма функцию $\prod\limits_{k=1}^{\infty} \frac{k(5+k)}{(3+k)(2+k)}$
3. Доказать, что $\prod\limits_{k=1}^{\infty} \frac{k}{x+k}\left(\frac{k+1}{k}\right)^x = \Gamma(x+1)$
4. Докажите формулу утроения $\Gamma(x/3)\Gamma(x+1/3)\Gamma(x+2/3) = c\Gamma(x)3^{-x}$
5. Доказать единственность функции телескопирующей $\frac{1}{x^2}$ и стремящейся к нулю на бесконечности.
6. Доказать единственность монотонной функции телескопирующей $\frac{1}{x}$
7. Доказать формулу понижения для комплексного аргумента, если гамма-функция определена произведением Вейерштрасса.
8. Доказать формулу удвоения для комплексного аргумента, если гамма-функция определена произведением Вейерштрасса.
9. Доказать что функция $x^{x-\frac{1}{2}}e^{-x} \cdot e^{\mu(x)}$ совпадает с $\Gamma(x)$, если $\mu(x)$ — выпуклая функция с разностью $\Delta\mu(x) = 1 - \left(x+\frac{1}{2}\right)\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$
10. Доказать. что $\Delta \ln x$ — выпуклая функция.
11. Доказать, что произведение положительных монотонно возрастающих выпуклых функций — выпукло.